

Maandblad voor
de didactiek
van de wiskunde

Orgaan van
de Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren
van Liwenagel
en van
de Wiskunde-
werkgroep
van de w.v.o.

47e jaargang
1971/1972
no 2
oktober

Wolters-Noordhoff

EUCLIDES

Redactie: G. Krooshof, voorzitter - Drs. A. M. Koldijk, secretaris - Dr. W. A. M. Burgers - F. Goffree - Dr. P. M. van Hiele - Ch. Krijnen - Drs. J. van Lint - L. A. G. M. Muskens - Dr. P. G. J. Vredenduin.

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskundewerkgroep van de W.V.O.
Het blad verschijnt 10 maal per cursusjaar.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Secretaris: Drs. J. W. Maassen, Traviatastraat 132, Den Haag.
Penningmeester en ledenadministratie: Drs. J. van Dormolen, Lange Voort 207, Oegstgeest. Postrekening nr. 143917 t.n.v. Ned. ver. v. Wiskundeleraren, te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 15,— per verenigingsjaar.
Adreswijziging en opgave van nieuwe leden aan de penningmeester

Liwenagel

Leden van Liwenagel kunnen zich op Euclides abonneren door aanmelding bij de penningmeester: Dr. C. P. Koene, Willem Klooslaan 20, Heemstede, postrekening t.n.v. Liwenagel nr. 87185.

Wiskundewerkgroep van de W.V.O.

Leden van de groep kunnen zich abonneren op Euclides door aanmelding bij de secretaris: Drs. H. C. Vernout, van Nouhuysstraat 11, Haarlem (N), postrekening 261036 t.n.v. de penningmeester te Voorburg.

Artikelen ter opname worden ingewacht bij G. Krooshof, Dierenriemstraat 12, Groningen, tel. 050-772279.

Boeken ter recensie aan Dr. W. A. M. Burgers, Prins van Wiedlaan 4, Wassenaar, tel. 01751-3367.

Mededelingen, enz. voor de redactie aan Drs. A. M. Koldijk, Johan de Wittlaan 14, Hoogezand, tel. 05980-3516.

Opgave voor deelname aan de leesportefeuille (buitenlandse tijdschriften) aan Dr. A. J. E. M. Smeur, Prins Alexanderlaan 13, Breda.

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 15,—. Hiervoor wende men zich tot: Wolters-Noordhoff N.V., Groningen, Postbus 58.

Advertenties zenden aan:

Intermedia Groningen N.V., Oude Boteringestraat 22, Groningen, tel. 050-129786-30785.

Tarieven: $^1/_1$ pag. *f* 130,—, $^1/_2$ pag. *f* 70,— en $^1/_4$ pag. *f* 40,—.

Wiskunde op de basisschool? (II)

F. GOFFREE
A. TREFFERS
E. WIJDEVELD

Utrecht

1 Inleiding

In het vorige artikel (Euclides 46 no. 8) kwamen we tot de volgende (vast)stellingen:

– Uit de struktuur van de moderne (school)wiskunde is afleidbaar, dat de didaktiek ruime mogelijkheden binnen de diverse schooltypen kan verwerven.
– Met de verandering van de leerstof zal dan ook vooral een aanbiedingsverandering gepaard dienen te gaan.
– Om dit echter in het totale basisonderwijs te realiseren zal er allereerst mankader gevormd dienen te worden om de heroriëntering en begeleiding van de onderwijzer te verzorgen.
Tegelijkertijd zal de ontwikkeling van een plankader voortgezet moeten worden. Het onderwijs-leerplan zal de omheining vormen van het gebied waarbinnen verschillende schoolwerkplannen (o.a. metoden) gerealiseerd worden.
– De term modern wiskunde-onderwijs op de basisschool is weinig zeggend: de grote pluriformiteit van de uitwerkingen is één van de meest opvallende trekken ervan.
– De slogan:
'Wiskobas wil niet zonder MEER wiskunde-onderwijs op de basisschool' is daarmee even weinig zeggend wat de inhoud aangaat. Wat de invoering betreft wil ermee gezegd zijn, dat bijscholing, begeleiding, kadervorming en leerplanontwikkeling een noodzakelijke (maar niet voldoende) voorwaarde vormen voor een verantwoorde verandering. Vandaar dus: 'niet zonder MEER wiskunde-onderwijs op de basisschool! '
– Het schooljaar 1971-1972 zal daarom vooral in het teken staan van kadervorming (inspekteurs, medewerkers schooladviesdiensten, e.a.), heroriëntering van een eerste kleine groep onderwijzers, vernieuwing van het vak rekendidaktiek op de Pedagogische Akademies en onderwijsleerplanontwikkeling.

Voordat we overgaan tot een karakteristiek van de leerplanontwikkeling allereerst een korte typering van het huidige rekenonderwijs.

2 Het vigerende leerplan voor rekenen

De traditionele indeling van een leerplan is als volgt:
a. Leerstofordening in vage, algemene termen gesteld

b. Verdeling van de leerstof in verschillende leerjaren
c. Lijst van boeken, die gebruikt worden
d. Lijst van werktijden voor het desbetreffende vak

In grote lijnen komt de leerstofindeling voor rekenen op de basisschool hierop neer:

Klas I: introduktie van de natuurlijke getallen 1 t/m 20; strukturereren-optellen-aftrekken.
Klas II: natuurlijke getallen 20 t/m 100. Vermenigvuldigen.
Klas III: natuurlijke getallen 100 t/m 1000. Delen-delen met rest-begin van cijferen. Redaktiesommen.
Klas IV: natuurlijke getallen groter dan 1000. Staartdelingen-introduktie van de breuken-redaktiesommen.
Klas V: operaties met breuken-kommagetallen-cijferen-procentenvraagstukken-ontbinden in faktoren.
Klas VI: breuken-verhoudingen-vreemde valuta-veelvouden.

Naast deze getalgerichte aktiviteiten wordt i.h.a. nog gesteld: klokkijken, grafieken maken, soortelijk gewicht, metriek stelsel, lengte-omtrek-oppervlakte-inhoud, tijdrekening, termometer, bruto-tarra-netto.

- Karakteristiek voor het huidige rekenonderwijs zijn de volgende punten:
  - De onderwijzers staan boven de stof
  - De rekenmetoden komen wat de leerstof betreft tot in de details overeen
  - Het aksent bij het onderwijs ligt op de rekenvaardigheid
  - Er wordt in de klassen 4, 5 en 6 veel aandacht besteed aan het opereren met breuken
  - Na de zesde klas wordt een duidelijke cesuur aangebracht: rekenen wordt niet gezien als een deel van de wiskunde

De onderwijzer is echter met het huidige rekenonderwijs in het algemeen niet ontevreden: het doel (rekenvaardigheid) is duidelijk, de inhoud overzichtelijk en de werkvorm makkelijk te organiseren. Weinig leermiddelen en veel boekjes staan ter beschikking.
De vele vernieuwingspogingen hebben zich incidenteel vastgezet; slechts op het gebied van het aanvankelijk rekenen is er blijvend sukses geboekt.

In de hogere leerjaren leidde de vernieuwingsgedachte voornamelijk tot een besnoeiing van de leerstof. Aan deze leerstofverarming werd een werkvormverrijking gekoppeld, die echter geen vat kreeg op het onderwijs in de hogere leerjaren; het vele goede werk van rekendidaktici ten spijt.

3 Eerste aanzet tot een nieuw leerplan voor rekenen

Een eerste aanzet tot een moderne vormgeving van het leerplan (op grond van traditionele leerstof) vindt men in 'Proeve van een leerplan voor het basisonder-

wijs' (Nutsseminarium c.q. Het Kohnstamminstituut te Amsterdam-1968_2). Het leerplan krijgt hier de funktie van een handboek voor de onderwijzer: de leerstofordening wordt gekoppeld aan didaktische aanwijzingen. Hiermee wordt dan tevens een ontmoeting tussen teorie en praktijk gerealiseerd. Als zodanig verdient 'De Proeve' dan ook alle lof van de werkers in het ruime gebied tussen teorie en praktijk.

Toch legt 'De Proeve' de problematiek van het moderne leerplandenken niet totaal open:

1) de ontkoppeling van leerstofpakket en leerjaar krijgt geen gestalte in het leerplan
2) de inhoud van het gebruikelijke rekenprogramma wordt niet diskutabel gesteld.

Juist als men een inhoudelijke verandering voorstelt komen de zware leerplanproblemen naar voren. Er dient dan immers geantwoord te worden op vragen als 'Waarom moet dit geleerd worden?', 'Wie bepaalt wat geleerd moet worden?', 'Hoe plannen we de ontwikkeling?', 'Welke storende faktoren kunnen er optreden?'.

4 Over doelstellingen

De eerste vraag is echter of een inhoudelijke verandering van het rekenonderwijs gewenst is. Welke argumenten zijn gebruikt om de leerstofverandering in welke richting dan ook te motiveren?
We noemen er enkele:

– Door de verandering van het wiskunde-onderwijs op de middelbare school is de kloof tussen reken- en wiskunde-onderwijs groter geworden. Er is dus een praktisch motief om de leerstof van het eindreken-onderwijs meer op elkaar af te stemmen. Deze motivering van de verandering is echter zeer eenzijdig: het betekent niets anders dan een pressie van bovenaf en is op zichzelf beschouwd ongewenst.
– 'De samenleving van morgen' heeft behoefte aan veel wiskundig geschoolden. Ook deze sociaal-ekonomische motivering is op zichzelf beschouwd schraal en niet zonder meer passend in het kader van de doelstelling van een onderwijsinstelling als het basisonderwijs.
– Moderne opvattingen in de psychologie geven aan dat kinderen meer kunnen (leren) dan volwassenen i.h.a. veronderstellen. Dit motief van 'het mogelijke' speelt echter niet over 'het wenselijke'. Waarom moeten we kinderen zo jong mogelijk zoveel mogelijk leren?

Op deze manier kunnen we nog meer motieven onder elkaar zetten en ... uitwissen.

De geschiedenis kan ons een lesje leren: in de 17e en 18e eeuw leerde men rekenen om de praktische waarde en in de 19e eeuw kwam er het motief van de vormende waarde bij. Hetzelfde kan gezegd worden van de motivering van het wiskunde-

onderwijs: men kon er wat mee doen, men leerde er mee denken, men leerde er mee denken binnen het vakgebied, e.d.

De motiveringen in de verschillende leerplans geven aan hoe de historie dan eens deze en dan weer gene motivering uitwiste. De diskussie binnen het wiskunde-onderwijs richtte zich tenslotte op één wezenlijk punt: de belangrijkste doelstelling van het wiskunde-onderwijs dient te zijn de kinderen goed wiskunde te leren.

Een juiste matematische werkinstelling en denkwijze leren aan de hand van praktisch bruikbare (toepasbare) leerstof is het leerdoel van wiskunde-onderwijs. Een dergelijke uitspraak kan echter tot misverstanden leiden indien er niet nadrukkelijk bij vermeld wordt, dat rekenvaardigheid, integratie van vakken, werken in groepen e.d. binnen het streven naar het doel vallen, omdat immers dit doel van het wiskunde-onderwijs zich bevindt binnen de doelstelling van het basisonderwijs, namelijk de persoonlijkheidsontplooiing. De didaktische drijfveer is op zichzelf genomen dus niet nieuw; door de veranderingen in het voortgezette onderwijs en de grotere mogelijkheden van vertikale leerstofplanning binnen de moderne (school)wiskunde heeft het motief echter een andere klank gekregen, die als het ware gesymboliseerd is in de term wiskunde-onderwijs i.p.v. rekenonderwijs.

Daarmee wil zeker niet gezegd zijn, dat het rekenonderwijs overboord gezet dient te worden; er wil echter wel mee gezegd zijn dat naast de specifiek getalgerichte aktiviteiten ook andere wiskundige aktiviteiten zinvol zijn. Zowel de propedeutische waarde (t.a.v. het vervolgonderwijs), de praktische waarde (t.a.v. de samenleving) als de matematisch-didaktische waarde (t.a.v. de ontwikkeling van de leerling) zullen er mee gediend zijn.

Bovenstaande opmerkingen ter motivering van de vraag of een inhoudelijke verandering gewenst is moeten bij de beoordeling van deze wenselijkheid niet slechts op zichzelf beschouwd worden, daarvoor zijn ze te algemeen en te summier.
Om de lezer meer inzicht te verschaffen in de konkretiseringen ervan publiceren we in een volgende bijdrage in dit blad een gedeelte van BLOK I voor de heroriëntering voor onderwijzers.

De noodzaak van de verandering van het huidige rekenonderwijs wordt door vrijwel iedere leraar wiskunde (rekendidaktiek) van de P.A. onderstreept.
Vijftig procent van deze leraren wenst een revolutionaire verandering, achtenveertig procent is voor een meer geleidelijke herziening.

Hiermee is echter geenszins aangegeven in welke richting men een verandering van het rekenonderwijs zoekt.
Eén feit komt echter duidelijk naar voren: een centraal instituut voor wiskunde-onderwijs zal de herziening richting moeten geven. Immers, de pluriformiteit van de uitwerkingen van de herzieningen in het buitenland, gevoegd bij een tendens

naar regionalisering van de vernieuwing in het binnenland zou een versnippering van vernieuwingskrachten teweeg brengen.

De vraag, die nu dus overblijft – de kansvraag! – luidt: Hoe wil Wiskobas de herziening bereiken?
We kunnen deze vraag dan weer splitsen in
a) welke inhoud krijgt het onderwijs-leerplan?
b) welke strategie volgen we om de vernieuwing van het onderwijs tot de alledaagse schoolpraktijk te brengen?

Deel a) van de vraag heeft op zichzelf gesteld een vrijblijvend karakter: er wordt een stuk vernieuwing geserveerd. Meer niet.
Het tweede deel van de vraag informeert naar de wijze waarop Wiskobas te werk gaat om te verzekeren, dat de vernieuwing zich werkelijk in de onderwijspraktijk vastzet.
De ontwikkeling van het onderwijs-leerplan – het eerste deel van de vraag – valt direkt onder de verantwoordelijkheid van Wiskobas, alsmede de her- en bijscholingskursussen; het ontwerpen van een onderwijsleerstofpakket (waaronder het leerlingenboekje) voor de schoolpraktijk behoort slechts indirekt tot haar gebied. Vandaar, dat we ons nu zullen beperken tot de problemen van het onderwijsleerplan en daarbij allereerst ingaan op enkele terminologische kwesties.

5 Onderwijs-leerplan en school-werkplan

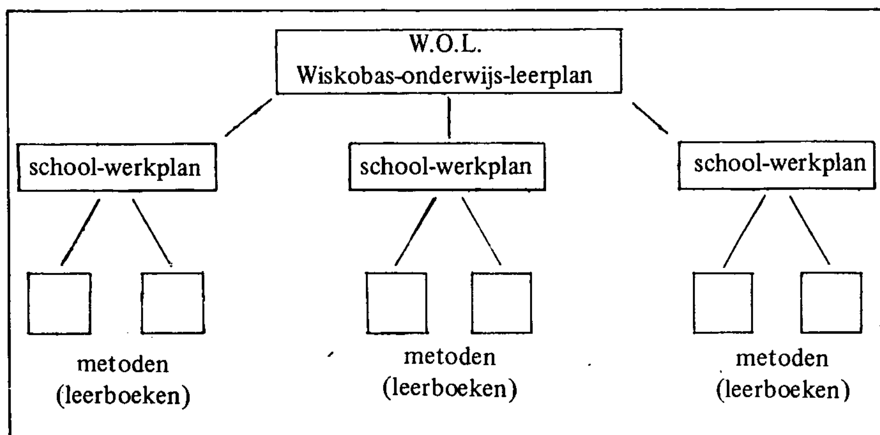
Het onderwijs-leerplan is op te vatten als een BRON waaruit men kan putten om een school-werkplan (waaronder een metode) te ontwikkelen. Het geeft een beschrijving van de mogelijkheden van leerstofordening ('t WAT) en verwerking ('t HOE) aan de hand van twintig kategorieën, te weten:

1) Verzamelingentaal
2) Relaties en funkties
3) Getallennotatie
4) Gebruik van getallen
5) Getalsystemen
6) Operaties met getallen
7) Meetkundige figuren
8) Meetkundige transformaties
9) Getallenleer
10) Meten en benaderen
11) Empirische exploratie
12) Statistiek
13) Algoritmiek
14) Rekenen met kansen
15) Rekenapparatuur
16) Toepassingen
17) Algebra
18) Meetkunde
19) Logika
20) 'Topics'

Het onderwijs-leerplan geeft naast het maximale en beschrijvende gedeelte een minimaal en voorschrijvend gedeelte aan (kernstof).

Het school-werkplan zal o.m. een beschrijving van de doelstellingen in termen van gedrag, alsmede allerlei aanwijzingen voor de onderwijzer omtrent uitvoering van taken, gebruik van media, evaluatie e.d. geven.

Zowel in het onderwijs-leerplan – wat Wiskobas moet realiseren – als in een school-werkplan – wat Wiskobas slechts kan stimuleren – zullen opmerkingen te vinden zijn van de ontwikkelingspsychologische en leerpsychologische aard, voorzover die tenminste relevant zijn voor het desbetreffende onderdeel.



Wiskobas stelt zich dus 'meta-metodisch' op en om het einddoel te bereiken zal zijn taak zijn:

1e. Het samenstellen van een onderwijs-leerplan maximaal en beschrijvend van karakter.
2e. Vanuit publikaties en d.m.v. kontakt met schrijversgroepen van uitgevers en instituten het samenstellen van school-werkplannen stimuleren.
3e. Zorg dragen voor kadervorming en dit kader invloed laten uitoefenen op het groeiende leerplan.
4e. Door het instellen van een samenwerkingskommissie, waarvan de leden verbonden zijn met 'werkers in het onderwijsveld', een grotere eenheid in de realisering te brengen dan nu veelal in diverse landen het geval is.
5e. D.m.v. een begeleidend tijdschrift een en ander te ondersteunen.
6e. De publikatie van het onderwijs-leerplan zal fase-gewijs verlopen: ieder jaar zal er één uitgave zijn.

De eerste uitgave van een plan, dat als uitgangspunt kan dienen voor de ontwikkeling van een onderwijs-leerplan is reeds intern gepubliceerd.

We zullen u enige informatie over dit uitgangspunt verschaffen.

6. Interne publikatie 0 van een onderwijs-leerplan. Een tweede aanzet.

In de opmerkingen vooraf wordt onder meer gesteld dat:

– er geen minimum-programma aangeboden wordt
– er een onderwijs-leerplan dient te komen
– het uit dit ontwerp groeiende onderwijsleerpakket niet *'zonder meer'* aan het

basisonderwijs aangeboden wordt; dit 'meer' is onderzoek, heroriëntering, begeleiding
– er in het ontwerp geen volgorde in de leerstof is aangebracht per leeftijdsgroepen
– er met niveaugroepen gewerkt zal worden
– het tijdschrift ter begeleiding zal dienen
– de relatie met andere vakken speciale aandacht verdient.

Het kader van de algehele doelstellingen van wiskunde-onderwijs, van waaruit dit ontwerp ontwikkeld is, is:

– begeleiding van de kinderen in hun benadering van de wiskundige aspekten van de werkelijkheid, zoals men zich die nu en in de (nabije) toekomst voorstelt
– wiskundige vorming in harmonie met persoonlijke aanleg en met redelijke eisen van samenleving en voortgezette opleiding.

Dit houdt in dat de kinderen:

– leren adekwaat te reageren in wiskundige situaties in het dagelijks leven
– leren werken met wiskundige modellen
– diverse redeneervormen leren
– wiskundig georiënteerde apparatuur leren gebruiken
– resultaten, die met wiskundige metoden zijn verkregen, leren beoordelen
– de betekenis van de wiskunde voor de hedendaagse samenleving leren doorzien c.q. begrijpen
– een onderzoek van wiskundige metoden leren verwoorden
– isomorfe strukturen leren herkennen
– een ongeordend, kwantitatief veld in de werkelijkheid van het dagelijks leven te exploreren en te struktureren
– symbolen als namen van konkrete of abstrakte grootheden leren te gebruiken
– leren werken met abstrakties
– vaardigheid in het gebruik van wiskundige taal verkrijgen
– een positieve houding t.o.v. het matematiseren verkrijgen.

Na deze algemene doelstellingen volgen meer gespecificeerde doelstellingen: ongeveer 60 van deze doelstellingen per leeftijd, groep (twee jaren omvattend). Bij wijze van voorbeeld geven we u de leerdoelen voor de groep 5-6 jaar:

Niet geoperationaliseerde leer- en lesdoelen (5-6 jaar)

1. Het verkrijgen van vaardigheid bij het optellen en aftrekken van natuurlijke getallen tot en met 20.
2. Het leren 'verslag geven' van een onderzoekje.
3. Het verkrijgen van vaardigheid in het meten van afstand.
4. Het verkrijgen van vaardigheid in het tekenen van diagrammen m.b.t. eindige verzamelingen.
5. Het verkrijgen van inzicht in het gebruik van de abacus.
6. Het kunnen klassificeren van meetkundige figuren uit de omgeving.
7. Het leren omgaan met geld.

8. Het leren klok kijken – het meten van tijdsduur.
9. Het kunnen kwantificeren van situaties uit een verhaal: wiskundige zinnen maken.
10. Het kunnen gebruiken van een 'rekenliniaal' als instrument voor het optellen en aftrekken.
11. Het kunnen bepalen van de oplossingsverzameling als deelverzameling van een gegeven keuzeverzameling onder een open bewering.
12. Het kunnen hanteren van ruimtelijke relaties als links, boven, vóór, naast, buitengebied, gesloten kromme, gemeenschappelijk binnengebied, voorste, middelste, midden tussen, tussen, ...
13. Het kunnen invullen en lezen van een tabel met dubbele ingang.
14. Het kunnen hanteren van de commutatieve wet van de optelling (zonder de *naam* te noemen).
15. Het kunnen werken met functies in de vorm van 'machines' – unaire operaties als +1.
16. Het kunnen tellen – visueel, auditief, motorisch.
17. Het functioneel gebruiken van de relaties $=, \neq, <$, 'is even lang als', 'is één meer dan' e.d.
18. Het kunnen schrijven van de symbolen 0, 1, ...9.
19. Het kunnen bepalen van een 'symbool' bij een aantal eenheden in basis x ($x = 2, x = 3, x = 4, x = 5, x = 6, x =$ tien).
20. Het kunnen tekenen van figuren (die bijv. op een spijkerbord voorgemaakt zijn).
21. Het kunnen maken van optellingen (en aftrekkingen) met behulp van de wiskundige balans.
22. Het kunnen schematiseren van aantallen (bijv. op een honderdveldje):

    x x x x x
    x x x x x
    x x x x x
    x   [3x5] + [1.]

23. Het krijgen van oefening in het creëren van een concrete achtergrond bij een gegeven wiskundige zin. (Mijn boek over . . . ., Albums maken).
24. Het kunnen 'springen' op de getallenlijn (0-2-4-6- ....).
25. Het kunnen leggen van een 1-1-relatie tussen twee verzamelingen.
26. Het noteren van een verzameling door opsomming van de elementen.
27. Het herkennen van gemeenschappelijke eigenschappen van elementen van een verzameling – verzamelingen uitbreiden.
28. Het leren zien van een natuurlijk getal als gemeenschappelijke eigenschap van gelijkmachtige verzamelingen.
29. Het kunnen aanvullen van rijen, figuren, getallen, zinnen, woorden e.d. (via 27).
30. Het kunnen werken met schablonen en eenvoudige (isometrische) transformaties.
31. Het ervaren van de grootte van een getal, zowel het kardinale als ordinale aspect in aanmerking nemend.
32. Het kunnen etiketteren van verzamelingen n.a.v. de 'gemeenschappelijke

eigenschap' van de elementen.

33. Het kunnen etiketteren van een verzameling i.v.m. het kardinaal getal.
34. Het kunnen stimuleren van de getallen 0 t/m 20.
    a. via verzamelingen
    b. m.b.v. abacus
    c. op abstract niveau.
35. Het kunnen structureren van een verzameling concrete objecten n.a.v. een (equivalentie) relatie (kleur, vorm, grootte, ...).
36. Het kunnen ordenen (lineair) van een verzameling n.a.v. een (lineaire) ordeningsrelatie.
37. Het kunnen bepalen van de 'opvolger' van een natuurlijk getal, evenals van de 'voorganger'.
38. Het kunnen werken met het getal nul en de lege verzameling.
39. Het kunnen structureren van een verzameling om tot de vermenigvuldiging (deling) te komen.
40. Het kunnen uitbeelden van een concrete, kwantitatieve situatie in een histogram.
41. Het kunnen interpreteren van een eenvoudig pictogram.
42. Het kunnen ordenen van een verzameling gewichten naar grootte.
43. Het kunnen ordenen van een verzameling inhouden door empirisch onderzoek (watertafel).
44. Het kunnen ordenen van een verzameling figuren naar grootte van de oppervlakte (door 'opleggen').
45. Het kunnen ordenen van een verzameling (rechte) lijnstukken naar lengte.
46. Als 45 voor krommen.

Deze doelstellingen zijn nog niet zo verfijnd, dat ze eenvoudig in vormen van leergedrag vertaald kunnen worden en staan als zodanig tussen algemene en geoperationaliseerde doelstellingen in.

In de interne publikatie is de leerstof daarna gekategoriseerd in de 20 genoemde onderwerpen onder paragraaf 5. Tenslotte is er een voorbeeld van een mogelijke uitwerking bijgevoegd.
Deze eerste aanzet, bestaande uit:
a. opsomming van de algemene doelstellingen
b. opsomming van de specifieke doelstellingen
c. kategorisering naar een twintigtal aspekten
d. voorbeeld van een uitwerking tot een leergang

zal het uitgangspunt vormen voor de eerste publikatie van een (onvolgroeid) onderwijs-leerplan in het kursusjaar 1971-1972.

Deze publikatie heeft zeker geen definitief karakter, maar zal beschouwd moeten worden als een eerste diskussienota. Het is vooral ook de bedoeling, dat de onderwijzers, die de heroriënteringskursussen volgen invloed op de ontwikkeling uitoefenen. Hoe zij daartoe de gelegenheid krijgen zetten wij in het laatste artikel uiteen. Wij zullen het onderwijzersboekje van BLOK I van de heroriënteringskursus in z'n geheel (± 7 bladzijden) publiceren, zodat u een indruk krijgt op welke wijze Wiskobas z'n algemene gedachten in praktijk tracht te brengen.

NEDERLANDSE VERENIGING VAN WISKUNDELERAREN.

Agenda van de jaarvergadering op zaterdag 16 oktober 1971 in het 'Transitorium II' van het Universiteitscentrum 'De Uithof' te Utrecht.

Aanvang: 10.30 uur.

1. Opening door de voorzitter, dr. J.K. van den Briel.
2. Notulen van de algemene vergadering 1970.[1])
3. Jaarverslagen.[2])
4. Décharge van de penningmeester en benoeming van de nieuwe kascommissie.
5. Bestuursverkiezing wegens periodiek aftreden van L.A.G.M. Muskens en dr. P.G.J. Vredenduin.
   Het bestuur stelt beide aftredenden kandidaat.
6. Vaststelling van de contributie 1972/73.
   In verband met de verhoging van de abonnementsprijs van 'Euclidus' stelt het bestuur voor de contributie te verhogen tot f 20,–
7. Splitsing van de vergadering in twee delen.
   7.1 Voordracht van drs. A.J.Th. Maassen
   Riemann-integreerbaarheid en primitiveerbaarheid.
   7.2 Voordracht van G. Krooshof
   Relaties en afbeeldingen.

   Pauze.

8. Voordracht van drs. H.G.B. Broekman
   Strategie van enkele meetkunde-methodes.
9. Rondvraag.
10. Sluiting.

---

[1]) Zie het septembernummer, p. 30.
[2]) Id. p. 29

Redactieverslag 46e jaargang van Euclides

Aan de besturen van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, van Liwenagel en van de Wiskunde-werkgroep van de WVO.

Met genoegen ziet de redactie van Euclides terug op de 46e jaargang, die 402 pagina's telde. Deze bevatte belangrijk meer didactische bijdragen (schoolwiskunde, schoolpraktijk, methoden, doelstellingen, informatie) dan ooit tevoren. Zeker 230 bladzijden waren er aan gewijd, terwijl daarnaast nog een 70-tal gevuld was met rapporten, verslagen, examenopgaven, die voor de leraar van belang zijn. De rest van de inhoud bestond uit verenigingsnieuws, berichten, andere dan schoolwiskunde, historische bijdragen, boekbesprekingen en recreatie.
Bovendien werd de regelmaat in de verschijning, die bij de vorige jaargang zo zeer te wensen overliet, dank zij de medewerking van de uitgever weer geheel bereikt.
Pogingen om de lezers van het blad meer te betrekken bij het bepalen van de inhoud leden nog steeds schipbreuk. Er komen maar zeer weinig reacties op gestelde vragen en uitdagingen.
In de loop van het jaar trad Dr. D.N. van der Neut uit de redactie wegens het neerleggen van zijn ambt. De opengekomen plaats werd om organisatorische redenen nog niet bezet.

september 1971

Namens de redactie
G. Krooshof, voorzitter
A.M. Koldijk, secretaris

Lineaire transformaties en wijziging van het assenstelsel

W. BURGERS

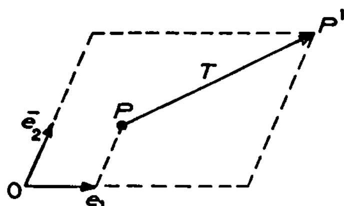
Wassenaar

Men kan een lineaire transformatie op twee manieren beschrijven, of als een deformatie van de ruimte of als een 'changement de décor' n.l. als een overgang van het oorspronkelijke coördinatiestelsel naar een ander.
Bij de behandeling in de klas had ik mij alleen bezig gehouden met de eerste opvatting, omdat mij die het interessantste voorkwam.
De eerste experimentele eindexamenopgaven bleken echter de basiswijziging te prefereren. De overgang van de ene opvatting naar de andere veroorzaakte in de klas opvallend veel moeilijkheden.
Het heeft nu dan ook heel wat 'probeersels' gekost alvorens ik een behandeling vond die kennelijk bevredigde.
Misschien is het nuttig het resultaat te bespreken.
We beperken ons dan tot R_2. Uitbreiding naar R_n geeft geen moeilijkheden. Het rekenwerk dat nodig is om de behandeling te generaliseren is dan echter beperkt.
Zij de transformatiematrix

$$T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dan zal de vector $\bar{p}\binom{1}{1}$, of het punt $P(1;1)$ overgaan in een nieuwe vector $\bar{p}'$, of een nieuw punt P'. Men vindt de kentallen uit:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}.$$



Men kan deze transformatie nader bestuderen. Enkele stellingen afleiden, b.v. lijn → lijn, parallellisme → parallellisme, er kunnen eigenwaarden optreden en bijbehorende eigenvectoren.

De eigenwaarden vindt men uit: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0.$

(algemeen uit $\lambda^2-(a_1+b_2)\lambda+\Delta_T = 0$) als $T = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$

Dit is de gang van zaken bij de eerste opvatting.

Nu de tweede opvatting.

Men laat het punt P op zijn plaats. Voor de transformatie T waren de coördinaten (1; 1), na de transformatie (3; 2). De vraag is nu:

wat is nu het nieuwe coördinatenstelsel?

We beginnen met een voorbeeld.

Stel we starten in het stelsel N met basis $(\bar{e}_1, \bar{e}_2)$ en kiezen een stelsel S met basis $(\bar{e}_1+3\bar{e}_2,\ 2\bar{e}_1+\bar{e}_2)$ dan is:

$$\begin{cases} \bar{e}_1^* = \bar{e}_1+3\bar{e}_2 \\ \bar{e}^* = 2\bar{e}_1+\bar{e}_2 \text{ en dus de basismatrix } B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Een punt in S met coördinaten $(x_1^*; x_2^*)$ heeft dan in het stelsel N coördinaten x_1 en x_2 die men a.v. vindt:

$$\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix} = x_1^*\bar{e}_1^*+x_2^*\bar{e}_1^* = x_1^*(\bar{e}_1+3\bar{e}_2)+x_2^*(2\bar{e}_1+\bar{e}_2) =$$

$$= (x_1^*+2x_2^*)\bar{e}_1+(3x_1^*+x_2^*)\bar{e}_2$$

$$\begin{cases} x_1 = x_1^*+2x_2^* \\ x_2 = 3x_1^*+x_2^* \end{cases} \text{of} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_N = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}_S \text{ of } \underline{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_N = B^t \begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}_S}$$

waarbij B^t de getransponeerde matrix is van B (B gespiegeld t.a.v. de hoofddiagonaal).

Hieruit volgt: $\begin{pmatrix} x_1^* \\ x_2^* \end{pmatrix}_S = (B^t)^{-1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_N$

zodat de basiswijziging overeenstemt met een transformatie (deformatie van R_2) $T = (B^t)^{-1}$. We hebben dus de relaties:

$$\boxed{T = (B^t)^{-1} \quad \text{en} \quad B = (T^{-1})^t}$$

maar

$$TT^{-1} = I \Leftrightarrow (TT^{-1})^t = I \Leftrightarrow (T^{-1})^t T^t = I$$

d.w.z.

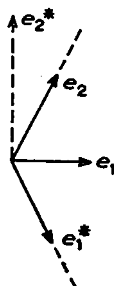
$$(T^{-1})^t = (T^t)^{-1}$$

dus

$$\boxed{T = (B^t)^{-1} \quad \text{en} \quad B = (T^t)^{-1}}$$

In voorbeeld 1 was $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $T^t = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en $(T^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

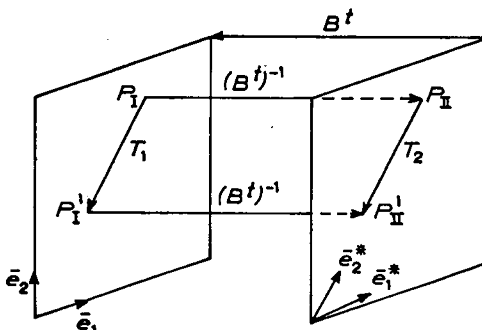
zodat het nieuwe stelsel de basis $(\bar{e}_1 - \bar{e}_2,\ -\bar{e}_1 + 2\bar{e}_2)$ had.



Het zal dikwijls nuttig zijn de deformatie van R_2 tengevolge van de transformatie T te onderzoeken door eerst een nieuw assenstelsel aan te nemen en dan liefst zo dat de beschrijving van de deformatie vereenvoudigd is.

Hoe verandert de transformatiematrix tengevolge van een assenwijziging?

Stel de oorspronkelijke transformatiematrix T_1, de basismatrix van de assenwijziging B en de nieuw optredende transformatiematrix T_2. (T_2 en T_1 noemt men gelijkvormig.)
Om de kwestie schematisch voor te stellen, tekenen we twee parallelle vlakken. Het ene voor T_1, het andere voor T_2.



We zien:

$$P_I \xrightarrow{T_1} P_I', \qquad P_I' \xrightarrow{(B^t)^{-1}} P_{II}' \quad \text{dus} \quad P_I \xrightarrow{(B^t)^{-1}T_1} P_{II}'$$

$$P_I \xrightarrow{(B^t)^{-1}} P_{II}, \qquad P_{II} \xrightarrow{T_2} P_{II}' \quad \text{dus} \quad P_I \xrightarrow{T_2(B^t)^{-1}} P_{II}'$$

zodat

$$(B^t)^{-1}T_1 = T_2(B^t)^{-1}$$

of

$$\boxed{T_2 = (B^t)^{-1} T_1 B^t}$$

We willen dit nog met een voorbeeld toelichten.
Het ligt voor de hand, het coördinatenstelsel te kiezen langs de eigenvectoren van de transformatie.
Zij

$$T = \begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Eigenwaarden:

$$\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0 \leftrightarrow \lambda = 3, \lambda = 1$$

eigen vectoren:

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

De nieuwe basisvectoren:

$$\begin{cases} \bar{e}_1^* = 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2 \\ \bar{e}_2^* = \bar{e}_1 + \bar{e}_2 \end{cases}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = B^t, (B^t)^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

$$T_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & -4 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

zoals te verwachten was.
De eigenwaarden komen in de hoofddiagonaal, *de matrix B diagonaliseert de matrix* T_1.

Opmerking 1.

Zijn $\bar{a}$ en $\bar{b}$ vectoren in een orthonormaal stelsel, dan is het dotprodukt

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} = a_1 b_1 + a_2 b_2.$$

Men kan dit produkt ook berekenen met matrices, n.l. als $(a_1\, a_2)\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ d.w.z. als $a^t b$.

Zijn $\bar{a}$ en $\bar{b}$ vectoren in een stelsel S, waarvan de basis t.a.v. een orthonormaal stelsel B is, dan geldt:

$$(B^t a)^t (B^t b) = (a^t B)(B^t b) = a^t (BB^t) b$$

d.w.z. de transformatie is alleen hoek- en lengte-trouw als $BB^t = I$, waaruit de bekende relaties volgen.

$$(T = (B^t)^{-1}, B^t = T^{-1}, BB^t = (T^t)^{-1} T^{-1} = I \rightarrow TT^t = I)$$

Opmerking 2.

Wil men een matrix A diagonaliseren met een orthogonale matrix B: $D = B^{-1}AB$, dan is $B^{-1} = B^t$ en $D^t = D$, dus $(B^tAB)^t = B^tAB$ of $B^tA^tB = B^tAB$. Zodat $A^t = A$ d.w.z. dit kan alleen als de matrix A symmetrisch is.

Opmerking 3.

Wil men matrices ontwerpen met geschikte eigenwaarden dan kan men bijv. als volgt te werk gaan:
Neem de eigenwaarden $\lambda = 2$ en $\mu = 3$ (en voor R_3 nog een derde eigenwaarde). Neem nu willekeurige matrix B en bereken BDB^{-1}, bijv. neem

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ met } \det B = 1.$$

$$BDB^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 6 \\ -2 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix},$$

de eigenvectoren zijn dan $\begin{pmatrix} a_2 \\ \lambda - a_1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} a_2 \\ \mu - a_1 \end{pmatrix}$.

In ons geval dus $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ of $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Men kan dit rekenwerk in R_3 als volgt bekorten:

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 5 & 2 \\ x & y-\lambda & z \\ p & q & r-\lambda \end{pmatrix}.$$

Kies $\lambda = 2$, de eerste rij wordt: 1 5 2. Neem nu $x = 1$, $y-\lambda = 5$, $z = 2$ en kies dan $\lambda = 4$; dan wordt de eerste rij: -1 5 2. Neem nu weer $p = -1$, $q = 5$ en $r-\lambda = 2$, dus $r = 6$, dan wordt de gezochte matrix:

$$\begin{pmatrix} 3 & 5 & 2 \\ 1 & 7 & 2 \\ -1 & 5 & 6 \end{pmatrix}.$$

De som van de eigenwaarden is gelijk aan het spoor van de matrix, d.i. 16.

Tenslotte de moraal van het verhaal

Om verwarring te voorkomen kan men beter de nieuwe coördinaatassen (of basisvectoren) opgeven als vectoren in het oorspronkelijke stelsel.
In plaats van $N(\bar{e}_1 + 3\bar{e}_2, 2\bar{e}_1 + \bar{e}_2)$ gewoon:
de vectoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ zijn de nieuwe basisvectoren, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ de basismatrix.
De formules worden dan: $T = B^{-1}$ en $B = T^{-1}$ en $T_2 = B^{-1}T_1B$.

Samengevat:

De transformatie $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ opgevat als deformatie van het vlak, kan ook beschouwd worden als een basiswijziging.
De basismatrix is dan $T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ en de nieuwe basisvectoren zijn $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ en $\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Korrel CLXXV

Puzzel

Gegeven de verzameling: $V = (1, 2, 3, \ldots, 2n)$.
Bewijs dat er in elke deelverzameling V' van V, die uit $n+1$ elementen bestaat, minstens twee te vinden zijn, zodanig, dat de één een deler is van de ander.

(American Mathematical Monthly)

Bewijs: We definiëren: twee elementen zijn equivalent, als ze dezelfde grootste *oneven* deler hebben. Deze equivalentie induceert een klassen-indeling. Zo horen b.v. 9, 18, 36, 72, ... tot eenzelfde klasse.
Er zijn n klassen met b.v. als representanten: $1, 3, 5, \ldots, 2n-1$. Van de $n+1$ elementen van V' liggen er dus minstens twee in eenzelfde klasse. Daar echter van twee elementen van een klasse de één steeds een deler is van de ander, is hiermee het bewijs voltooid.

Opmerking: Het vraagstuk kan ook met inductie worden opgelost, maar bovenstaande oplossing is aardiger.

P. Bronkhorst.
Eindhoven

Verscheidenheden

Prof. Dr. O. BOTTEMA
Delft

LXXXIII De cosinussen van de hoeken van een driehoek.

Omdat de hoeken van de driehoek ABC voldoen aan de relatie $\alpha+\beta+\gamma = \pi$ zal er tussen $\cos\alpha$, $\cos\beta$ en $\cos\gamma$ een betrekking bestaan. Men kan deze als volgt afleiden.

$$\cos\gamma = -\cos(\alpha+\beta) = -\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta, \qquad (1)$$

$$\text{dus} \quad (\cos\alpha\cos\beta+\cos\gamma)^2 = (1-\cos^2\alpha)(1-\cos^2\beta), \qquad (2)$$

$$\text{ofwel} \quad 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma+\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma-1 = 0 \qquad (3)$$

Men kan de voorwaarde ook zó schrijven

$$\begin{vmatrix} -1 & \cos\gamma & \cos\beta \\ \cos\gamma & -1 & \cos\alpha \\ \cos\beta & \cos\alpha & -1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (4)$$

en zij waarborgt dat de drie homogene lineaire vergelijkingen $-u_1+u_2\cos\gamma+u_3\cos\beta = u_1\cos\gamma-u_2+u_3\cos\alpha = u_1\cos\beta+u_2\cos\alpha-u_3 = 0$ een oplossing hebben, nl. $u_1 : u_2 : u_3 = a : b : c$.
Wij gaan (3) nader beschouwen met behulp van een afbeelding waarbij de driehoek (beter: de klasse van onderling gelijkvormige driehoeken) correspondeert met het punt (x, y, z) in een rechthoekig assenstelsel, waarbij $x = \cos\alpha$, $y = \cos\beta$, $z = \cos\gamma$.
Het beeldoppervlak F heeft dan, na invoering van een vierde, homogeen makende coördinaat w de vergelijking

$$F = 2xyz+(x^2+y^2+z^2)w-w^3 = 0 \cdots \qquad (5)$$

Daaruit blijkt dat *F een oppervlak van de derde graad is.*
Wij zien voorlopig af van het feit dat x, y en z in het interval $[-1, 1]$ moeten liggen, en onderzoeken het kubisch oppervlak zonder restrictie.
Uit $w = 0$ volgt $xyz = 0$; F snijdt dus het oneigenlijke vlak volgens de drie rechten $l_1 : x = w = 0$; $l_2 : y = w = 0$ en $l_3 : z = w = 0$.

Een vlak $z = dw$, evenwijdig met OXY, gaat door l_3 en snijdt F dus nog volgens de kegelsnede K:

$$z = dw, x^2+2dxy+y^2+d^2-1 = 0. \tag{6}$$

De discriminant van de laatste vergelijking is $-(d^2-1)$.
Daaruit volgt dat K ontaard is als $d^2 = 1$. Voor $z = \pm 1$ komt er respectievelijk $(x+y)^2 = 0$ en $(x-y)^2 = 0$. Deze beide vlakken snijden dus elk F nog volgens twee samenvallende rechten

$$m_3 : x+y = 0,\ z = 1 \quad \text{en} \quad m_3^1 : x-y = 0,\ z = -1. \tag{7}$$

Daar de vergelijking van F invariant is voor cyclische verwisseling van x, y en z stellen wij vast dat op F ook liggen de rechten

$$m_1 : y+z = 0,\ x = 1 \text{ en } m_1^1 : y-z = 0,\ x = -1 \tag{8}$$

$$m_2 : z+x = 0,\ y = 1 \text{ en } m_2^1 : z-x = 0,\ y = -1. \tag{9}$$

De drie rechten m_1^1, m_2, m_3 gaan door het punt $A_1(-1, 1, 1)$, m_1, m_2^1, m_3 door $A_2(1, -1, 1)$, m_1, m_2, m_3^1 door A_3 $(1, 1, -1)$ en m_1^1, m_2^1, m_3^1 door $A_4(-1, -1, -1)$.
De zes rechten m zijn dus de ribben van het viervlak $A_1A_2A_3A_4$, dat ten duidelijkste regelmatig is. Men ziet verder gemakkelijk in dat elke rechte door een punt A_i twee in A_i vallende punten met F gemeen heeft. *De punten A_i zijn dus dubbelpunten van F*, dat daarmee gedetermineerd is als het kubische oppervlak van Cayley.
Het is welbekend dat zo'n oppervlak nog drie rechten bevat, die elk twee overstaande ribben van het viervlak snijden; dat zijn onze l_1, l_2, l_3. Is $B_1B_2B_3B_4$ een willekeurig viervlak, dan is de meetkundige plaats der punten waarvan de projecties op de zijvlakken in één vlak liggen het oppervlak van Cayley met dubbelpunten in B_i.
Het kan ook gedefinieerd worden als de verzameling van die punten waarvan de isogonaal toegevoegde oneindig ver liggen. Ten aanzien van beide eigenschappen neemt het oppervlak dus in de ruimte de taak over die in het platte vlak door de omgeschreven cirkel van een driehoek wordt verricht. Onze F is het bijzondere geval waarbij het viervlak regelmatig is en het heeft dan ook alle symmetrie-eigenschappen daarvan: het laat een bewegingsgroep van 12 elementen toe. Kiest men t.o.v. A_i barycentrische (of wat hier hetzelfde is afstands-) coördinaten x_1, y_1, z_1, w_1, dan is

$$\begin{aligned} x &= -x_1+y_1+z_1-w_1 \\ y &= +x_1-y_1+z_1-w_1 \\ z &= +x_1+y_1-z_1-w_1 \\ w &= x_1+y_1+z_1+w_1 \end{aligned} \tag{10}$$

en de vergelijking van F wordt

$$y_1z_1w_1+x_1z_1w_1+x_1y_1w_1+x_1y_1z_1 = 0, \tag{11}$$

een standaardvergelijking voor F, waarbij men verifieert dat zij door de isogonale transformatie $x_1 x_2 = y_1 y_2 = z_1 z_2 = w_1 w_2$ overgaat in het oneigenlijke vlak $x_2+y_2+z_2+w_2 = 0$.

Van de gedaante van F krijgt men een indruk door de doorsneden met $z = d$ te beschouwen, dus de kegelsneden K uit (6). Zij hebben hun middelpunt op de Z-as en men constateert verder dat de assen evenwijdig zijn met m_3 en m'_3. Voor $d = 0$ is K de cirkel met straal 1; voor $0 < d^2 < 1$ is K een ellips, voor $d^2 > 1$ een hyperbool. In het eerste geval kan men wegens $d = \cos\gamma$ voor K schrijven

$$\cos^2 \tfrac{1}{2}\gamma(x+y)^2+\sin^2 \tfrac{1}{2}\gamma(x-y)^2 = \sin^2\gamma, \tag{12}$$

waaruit volgt dat de halve assen van K gelijk zijn aan $\sqrt{2}\sin\frac{\gamma}{2}$ en $\sqrt{2}\cos\frac{\gamma}{2}$; voor $d > 0$ is de lange as evenwijdig met m_3, voor $d < 0$ evenwijdig met m'_3. Als $d \to 1$ gaat K over in de ribbe A_1A_2, voor $d \to -1$ in de ribbe A_3A_4.
Wij bedenken ons nu dat x, y en z de cosinussen van de hoeken van een driehoek zijn en dus aan beperkingen onderworpen. Punten van F waarvoor $z > 1$ corresponderen niet met driehoeken; alle hyperbolen K kunnen buiten beschouwing blijven. In fig. 1 is voor $0 < d = \cos\gamma < 1$ de ellips K geschetst;

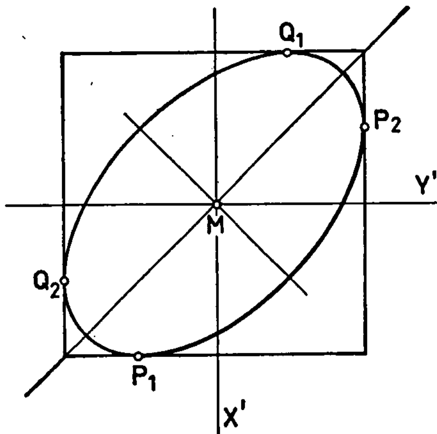


fig.1.

zij is ingeschreven in het vierkant $x = \pm 1$, $y = \pm 1$ en de raakpunten $P_1(1, -d)$, $P_2(-d, 1)$, $Q_1(-1, d)$ en $Q_2(d, -1)$ zijn tevens de snijpunten van het vlak van K met resp. m_1, m_2, m'_1 en m'_2. Met P_1 en P_2 corresponderen de grensgevallen $\alpha = 0$, $\beta = \pi-\gamma$ en $\alpha = \pi-\gamma$, $\beta = 0$ en het is duidelijk dat alleen punten op de boog P_1P_2 met driehoeken overeenkomen. Immers als men van P_2 opwaarts gaat neemt $\cos\alpha$ af, α zou groter dan $\pi-\gamma$ worden en β negatief. Voor een doorsnede met $0 > d = \cos\gamma > -1$ ontstaat figuur 2 en uit een overeenkomstige redenering blijkt dat alleen met de boog $P'_1P'_2$ driehoeken corresponderen. De conclusie is: *de driehoeken met hoeken* α, β, γ *worden afgebeeld op de punten* $(\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)$ *van dat gedeelte S van het*

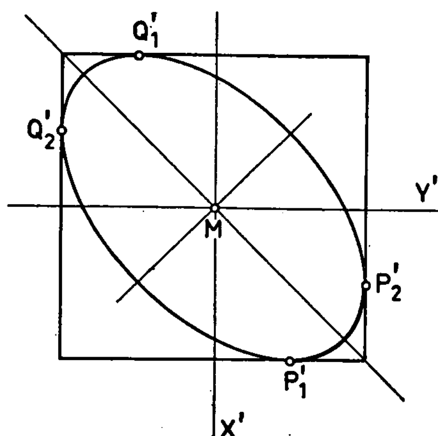


fig.2.

oppervlak van Cayley dat door de rechten m_1, m_2 en m_3 (dus de zijden van driehoek $A_1A_2A_3$) *wordt begrensd.* S ligt voor een deel S_0 (begrensd door drie kwartcirkels) in het eerste octant en heeft voorts stukken S_1, S_2, S_3 in de drie belendende octanten. Met punten van S_0 corresponderen scherphoekige, met de andere punten van S stomphoekige driehoeken..

Wij geven een enkele toepassing.

Bestaat er een driehoek waarvoor de cosinussen der hoeken gegeven verhoudingen hebben: $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = p_1 : p_2 : p_3$? Vertaald in het beeld wil dit zeggen: heeft de rechte l door O waarvoor $x : y : z = p_1 : p_2 : p_3$ met S een punt gemeen?

Wij zien dadelijk dat zo'n eventueel punt enig is en de hoeken van de driehoek dan ondubbelzinnig bepaald zijn. Het antwoord is positief als het snijpunt R van l met het vlak $A_1A_2A_3$ binnen de driehoek valt. De middens der zijden zijn $B_1 = (1, 0, 0)$, $B_2 = (0, 1, 0)$ en $B_3 = (0, 0, 1)$. Als p_1, p_2 en p_3 alle positief zijn ligt R binnen B_1, B_2, B_3 en dus a fortiori binnen $A_1A_2A_3$.

Is echter b.v. $p_1 < 0, p_2 > 0, p_3 > 0$ dan moet R binnen de driehoek $A_1B_2B_3$ vallen, waaruit volgt $p_1+p_2 > 0$, $p_1+p_3 > 0$. De conclusie is dus: *een driehoek met* $\cos\alpha : \cos\beta : \cos\gamma = p_1 : p_2 : p_3$ *bestaat altijd als de getallen p eenzelfde teken hebben*; *in het andere geval echter alleen als de absolute waarde van de p met afwijkend teken kleiner is dan de absolute waarde van elk der beide andere.* Is aan de conditie voldaan dan eist de bepaling van α, β en γ de oplossing van een derde-graadsvergelijking die voorspoedig verloopt en die wij de lezer overlaten.

De hier gegeven beschouwing over de cosinussen kan ook voor de tangenten en voor de sinussen van de hoeken van een driehoek worden gevolgd. Daar de eerste aan de betrekking $\operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta \operatorname{tg}\gamma - \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\gamma = 0$ voldoen, verkrijgt men eveneens een kubisch oppervlak; het heeft *drie* dubbelpunten en behalve hun drie verbindingslijnen liggen er nog zes rechten op, die echter alle imaginair zijn. De relatie tussen $\sin\alpha$, $\sin\beta$ en $\sin\gamma$ is van de *zesde* graad.

Het melkglas van Brouwer [1]

TJ. S. VISSER
Amsterdam

1 Herfst '69 kreeg ik Beth's Moderne logica [2]. Onlangs herlas ik het; en dat deed me weer grijpen naar Brouwer, die december 1950 het slotwoord had gesproken voor het Colloque international de logique mathématique te Parijs; sprekende over l'affranchissement total du lest des objets dont jouissent les mathématiques.
Juli '52 hield hij een voordracht in Kaapstad [3]. Voor ons stond hij dus toen op zijn kop. Daar maakte hij het woord opaque, ondoorzichtig, tot een wiskundige term. Maar opaque wordt in het Engels ook gebruikt voor matglas, of juister melkglas. Vandaar ons opschrift.

2 Brouwer sprak toen wederom[4] over vliedende eigenschappen van natuurlijke getallen. Een eigenschap v heet vliedend als:

1 voor ieder getal kan worden vastgesteld of het v bezit of niet (v-getal is of niet).

2 er geen manier bekend is om een getal dat v bezit te becijferen.

3 het niet absurd is om het bestaan van een v-getal te onderstellen.
'Opaque' wordt v als bovendien:

4 het ook niet absurd is om te onderstellen dat er heel geen v-getal bestaat[5].

Met een computer die zich verveelt kunnen we miljoenen natuurlijke getallen testen op hun v-zijn. Stuiten we daarbij op een v-getal dan weten we: er is een v-getal. Stuiten we niet op een v-getal dan . . . weten we niets. Want de getallenrij is onbeperkt en *kan* in zijn ondoorzochte staart best een v-getal hebben; zekerheid hebben we nooit; door het melkglas van (4). Derhalve: de vraag of er een v-getal existeert, heeft als mogelijke antwoorden 'ja' en 'we weten het (nog) niet'. Het antwoord 'nee' is niet mogelijk!
Het uitroepteken is Brouwers. Een gewoon mens [11a] zou zeggen: 'nu ja, wat doet ons weten er toe; de rij der getallen bestáát, en volgens Aristoteles is er of ja of nee een v-getal'. Brouwer antwoordt: de rij der getallen, en heel de wiskunde, bestaan uitsluitend in de menselijke geest die ze creëert en,

in gedachte, construeert; daarom hebben in het v-geval enkel de antwoorden 'ja' en 'we weten het niet' zin [6].

3 Beth wijst er op [7] dat deze wijsgerige leer van het constructivisme voorlopers heeft o.a. in Cusanus [8] en Kepler. De late middeleeuwer Klaas Krebs uit Kues aan de Moezel, genoemd Cusanus, werd kardinaal en baanbrekend geleerde [9] na zijn studie in Deventer(!), Heidelberg en Padua. De wiskunde bestaat enkel in de geest en wordt door deze opgebouwd. Na hem dacht aldus ook de beroemde Kepler, die derhalve weigerde het bestaan van een regelmatige 7-hoek te erkennen zolang geen constructie bekend was[10]. Brouwer trok uit dit constructivisme de uiterste gevolgtrekking [11], hierboven aangeduid bij 2.

4 Augustus 1953 sprak de bejaarde Brouwer op een congres in Kingston, Ont., over Points and Spaces [12]. Later placht hij te vertellen dat hij toen hoge koorts had. De foto lijkt dat wel te bevestigen. Onderwerp was ook hier: ja; nee; we weten het niet. Ik, onnozele leek, denk na lezing wat Toscanelli ± 1455 zei tegen Cusanus: Ik vind het duister en onzeker [13]. Maar dat is dom (opaque) van me. Of zou Brouwers betoogtrant af en toe opaque (ondoorzichtig; van melkglas) zijn? [14]

5 Binnen twee jaar na zijn dood is er een congres geweest in de stad der buffels Buffalo, N.-Y., gewijd aan Brouwers 'intuïtionisme'. Er spraken liefst vijf Nederlanders. Het congresboek verscheen vorig jaar [15]). Ik ken het niet. Maar ik wil hier nog aanhalen wat Beth in zijn boek [2] schrijft op blz. 83, onder de titel Paradoxen: 'Volgens Brouwer heeft een deel van de klassieke wiskunde het wezenlijke en onmisbare contact verloren met de levende werkelijkheid van het *intuïtief* wiskundig denken dat *constructief* is en onafhankelijk van de logica ()'; (cursivering van mij).
Vergelijk hierbij de titel van Mannoury's opstel [6] en denk aan het verblijf van de jonge Brouwer in Parijs; stad van H. Poincaré en E. Borel, ja, maar ook van de vitalist Bergson. De gewaagdheid van die opmerking komt geheel voor mijn rekening.

6 Brouwers dood! Op 2–12–1966, dat is al weer bijna vijf jaar geleden. In storm en regen bij zijn landhuis overreden door een, twee, drie, misschien meer auto's. Gruwelijk om te zeggen dat aldus de oerintuïtie van het intellect, voortbrengende de 2 en dan de 3 enzovoort [16], nog eens op de grens van zijn leven bevestiging vond.
In het N.T.v.W. publiceerde hij over fotometrie, het vak van Schermerhorn [17]. Hij verliet daarmee zijn hertogdommen, de axiomatiek en de topologie. Maar bleef wel buiten het gebied dat hem als jong student zo verontrust had: het gebied van losse wiskundige waarheden, wel fascinerend door onwrikbaarheid

doch helaas tevens huiveringwekkend door levenloosheid, als stenen uit een kaal gebergte van troosteloze oneindigheid [18].

7 Topologie! Het was voor hem een genoeglijk gebeuren dat Poolse topologen hem, toen hij 85 werd, een prentkaart zonden: la patrie de la topologie moderne au père de la topologie moderne. – Patrie zal hier zijn: tehuis; Polen herbergt belangrijke werkers op dat gebied. In ons land is het vak geïntroduceerd door Mannoury (1897).

8 Over zijn afkomst vertelde Brouwer graag hoe zijn vader, boerenzoon, schoolmeester was geworden: door tweemaal per week 4 uren heen en 4 uren terug te lopen naar de normaalschool in Leeuwarden, Ljouwert.
Uit een mij dierbare Universiteitsgids 1917/8 (de academie was toen mijn droom) blijkt dat Brouwer 4 uren per week college gaf. Enkel voor gespecialiseerde candidaten. Over trillingstheorie en over kanonische vergelijkingen. Dus noch over axiomatiek noch over topologie.
Nog als 83-jarige opponeerde hij helder, geenszins opaque, bij een letterkundige promotie [19]).
Voor ons opschrift zie 1, 2, 4 en 8. Om het onderwerp schreef ik op extra mooi papier.[20]

NOTEN

1 L. E. J. Brouwer (1881–1966), de eminente wiskundige die lang te Blaricum gewoond heeft.

2 E. W. Beth, Moderne logica (1967, postuum).

3 Suid-Afrikaanse Joernaal van Wetenskap, okt. 1952, p. 139–146: Historical Background, Principles and Methods of Intuitionism. Vooral p. 141.

4 Veel eerder al o.a. in Wenen, maart 1928: zie Monatsheft fuer Mathematik und Physik, band 36. 1. Heft: Wissenschaft, Mathematik und Sprache.

5 'Klassiek' voorbeeld: zie de getallen als rangnummers in de decimale ontwikkeling van π; is er een ranggetal met de eigenschap v dat er zeven achtereenvolgende zevens beginnen?

6 G. Mannoury in N.A.v.W., deel 21 (1943): La question vitale, A ou B? (p. 163: mettons A = Aristote et B = Brouwer'.)

7 Zie 2), in het belangwekkende opstel Constanten van het wiskundig denken; maar ook blz. 83 en 103. (Die constanten zijn volgens Beth: algorithme, deductie, onbeperktheid.)

8 Over Cusanus (1401–1464) zie E. J. Dijksterhuis, Mechanisering, III 4–13; H. Meschkowski, Denkweisen grosser Mathematiker (1961). Zijn hoofdwerk ontwierp hij op reis van Constantinopel naar Rome.

9 Sprokkel LVIII in Jg. 1964–1965, blz. 35, van het N.T.v.W. Zijn benadering $\varphi = 3 \sin \varphi : (2 + \cos \varphi)$ is 1614 door Snellius herhaald. – Cusanus en zijn cosinus!

10 Vermeld in 2), blz. 150. Keplers Harmonices mundi is kort geleden in facsimilé weer uitgegeven, mooi en duur; zie Boek I.

11 Aldus H. Freudenthal en A. Heyting, Levensbericht L. E. J. Brouwer, in Jaarboek Kon. Ac. v. Wet., 1966/7, blz. 5 van de overdruk. Zie nog:

[11a] Tegenover Brouwer b.v. G. H. Hardy, A Mathematicians Apology (Cambridge, 1948, blz. 70): 317 is a prime, not because we think so, or because our minds are shaped in one way rather than in another, but *because it is so.* – En: this 'realistic' view is much more plausible of mathematical than of physical reality, because mathematical objects are so much more what they seem.

[12] Can. Journal of Mathematics, Vol. 6, p. 1–17.

[13] M. Cantor, Geschichte, II, blz. 198 (2de druk).

[14] Zie [11], blz. 6: '... de trant van scherp formuleren, waarmee hij hele generaties de stuipen op het lijf jaagde, maar die tegenwoordig zo natuurlijk lijkt dat we thans gemakkelijker B. dan zijn tijdgenoten lezen'. Ja, doch zijn Begruendung der Mengenlehre unabhaengig vom logischen Satz vom ausgeschlossenen Dritten (1919) is door een vakman 'berucht moeilijk' genoemd. – Als jonge jongen kocht ik zijn, uiterlijk wel wat op de sonnettenbundel van Jacq. Perk lijkende, dissertatie uit 1907 Over de grondslagen der wiskunde (door Mannoury besproken in De Beweging, aug. '07); en Wiskunde, waarheid, werkelijkheid (1919, met de mooie zin: 'In wijsheid is geen logica'). Ze waren me te moeilijk; wat niets zegt. Over Brouwer heel vrijmoedig Freudenthal in zijn In memoriam (Alg. Hbd.).

[15] Te Groningen, 1970; 500 blz.; 100 gln.

[16] Wiskunde, waarheid, werkelijkheid; blz. 11/12 van het derde opstel, getiteld Intuïtionisme en formalisme.

[17] Jg. VI. Redacteur Wijdenes had als onderwijzer op vrije middagen met de jonge Brouwer in de collegebank gezeten.

[18] Jeugdherinnering, uit Brouwers toespraak bij Mannoury's ere-promotie te Amsterdam. (M. was 79).

[19] Van mevr. A. M. Cram-Magré, Over de dichter-wijsgeer J. A. Dèr Mouw (Adwaita, die met Brouwer, Mannoury e.a. significa bedreef; overleden 1919).

[20] (Bij de correctie): zie N.A.v.W., 1971, p. 17–23 n.a.v. de eerste Brouwer-memorial-conference met uitreiking van de „Brouwer-medaille".

Nieuw Wiskunde-onderwijs in oude lokalen

J. N. BOSMAN
Arnhem

Had de wiskundeleraar vroeger meestal voldoende uitdrukkingsmogelijkheden met een bord en een krijtje, (voor enkele zeer begaafden onder ons met veel overtuigingskracht en beeldend vermogen in handen en voeten was zelfs die summiere uitrusting overbodig) de ontwikkelingen van de laatste jaren bij het onderwijs in het algemeen en bij het wiskundeonderwijs in het bijzonder, wijzen erop, dat de behoefte aan andere hulpmiddelen toeneemt.
In het nog niet zo lang vervlogen verleden waren we al gauw tevreden als al onze leerlingen in staat waren bepaalde algoritmen foutloos uit te voeren en inderdaad was daartoe niet meer nodig dan een boek, een leraar, wiens wetenschappelijke achtergrond een bijkomende meevaller was, een bord, een krijtje, een rood potlood en een lokaal, dat zich in geen enkel opzicht onderscheidde van lesruimten voor andere studievakken. Een weinig dynamische maatschappij was grotendeels tevreden met de bestaande situatie en alleen in de breinen en de studeerkamers van enkele hoogbegaafde zieners speelde zich het voorspel af van de ontwikkelingen, waarmee we nu geconfronteerd gaan worden.
In 1961 constateerde de toenmalige Staatssecretaris van Onderwijs, Drs. G. C. Stubenrouch in een installatierede ter gelegenheid van de instelling der Commissie Modernisering Leerplan Wiskunde:

> 'Ook buiten de kringen van de beroepswiskundigen is het een bekende zaak, dat sedert het einde van de tweede wereldoorlog, de wiskunde een tijdvak van waarlijk revolutionaire ontwikkeling doormaakt. Een gestadig toenemende behoefte aan wiskundigen in de maatschappij gaat hiermede gepaard'.

Die ontwikkelingen, gestimuleerd door een meer dynamische maatschappij, waarin de veranderingen en aanpassingen op welhaast elk denkbaar terrein van menselijke activiteit steeds sneller en minder voorspelbaar plaats vinden, hebben inderdaad het wiskundeonderwijs niet onberoerd gelaten.

Ik denk aan:

1. de tendens om leerlingen door zelf-ontdekken belangrijke mathematische principes en disciplines bij te brengen.

2. het, weliswaar langzaam, toenemen van het gebruik en de mogelijkheden van overhead-projector, filmapparatuur en gesloten-t.v.-kringen.

3. ontwikkeling van demonstratie-modellen en rekenapparatuur voor het onderwijs.

4. experimenten met, althans voor het wiskundeonderwijs nieuwe didactische werkvormen, als klassegesprek, groepswerk, geprogrammeerde instructie.

5. heroriënteringscursussen voor leraren op elk niveau.

6. experimenten op het gebied van de wiskunde in het basisonderwijs.

7. onderzoek naar mogelijkheden tot gedifferentiëerd onderwijs in klasseverband.

Deze, ongetwijfeld onvolledige, opsomming zal duidelijk maken, dat de omgeving waarin het wiskundeonderwijs zich afspeelt, aan een diepgaande studie moet worden onderworpen. De beperkte mogelijkheden van de bestaande klaslokalen mogen de ontwikkelingen in geen enkel opzicht in de weg staan. Het is daarom, dat ik mij voorstel met dit stukje een bijdrage te leveren tot een gedachtenwisseling over de eisen waaraan wiskundevaklokalen nu en in de toekomst zullen moeten voldoen. Het lijkt mij nuttig daarbij meer uit te gaan van de toekomst dan van het heden, omdat naar de verwachting van velen de veranderingen in ons wiskundeonderwijs in de komende jaren wel eens in een stroomversnelling zouden kunnen geraken.

Om beter in te kunnen zien, waarom bepaalde voorzieningen in de wiskundelaboratoria noodzakelijk of gewenst zijn, lijkt het mij nuttig eerst een visie op het wiskundeonderwijs van de toekomst te schetsen, zoals ik die ontwikkeld vond in het eerder in deze kolommen genoemde boek '*Guidelines for teaching mathematics*' van Johnson en Rising.

1. De maatschappij is afhankelijk van nieuwe kennis en nieuwe produkten. Daarom zal een belangrijk doel van ons onderwijs worden, het bevorderen van creativiteit op alle terreinen. En omdat de hoeveelheid kennis blijft toenemen, zal het noodzakelijk zijn om zeer efficiënt te werk te gaan.
Hierbij zal onmisbaar zijn het gebruik van computers als informatiedragers. Maar ook rekenvaardigheid en het verwerven van inzicht zullen belangrijke doelstellingen blijven.

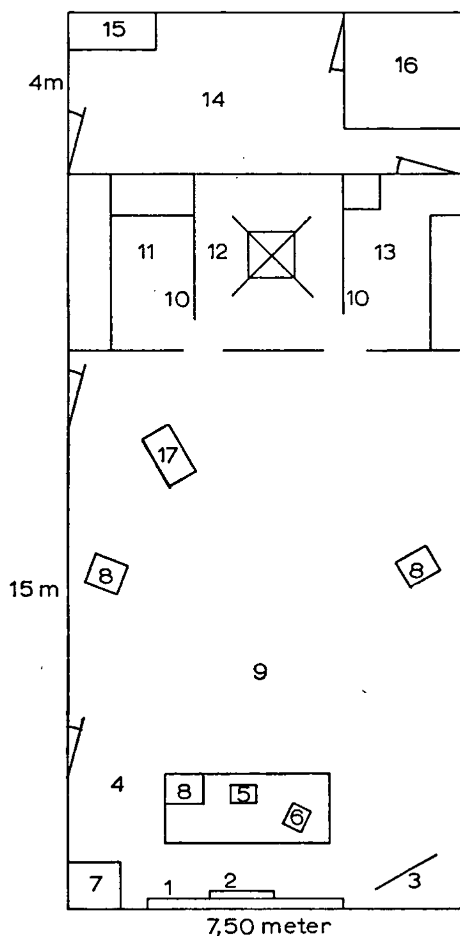
2. Nieuwe onderwerpen zullen worden ingevoerd en traditionele onderwerpen zullen worden verschoven naar lagere klassen. Natuurlijk zullen er dan meningsverschillen ontstaan over de waarde en het niveau van de 'nieuwe' en de 'oude' onderwerpen. Het gevaar bestaat dan dat in verschillende scholen van gelijk type uiteenlopende programma's behandeld zouden worden. Daarom lijkt een goed opgezette leerstofomschrijving voor de toekomst gewenst.

3. Geleidelijk zal de behoefte aan hulpmiddelen toenemen. Films, eenvoudige computermodellen, computer-terminals, handvaardigheidsmateriaal, bouw- en experimenteerdozen, leertoestellen, demonstratie-modellen, materiaal voor proefnemingen en aanvullende lectuur zullen de behoefte aan opbergruimte in het wiskundelokaal doen toenemen.
Het gebruik van stencilmachine, fotocopieerapparaat en transparantenmaker zal ongetwijfeld toenemen. In veel scholen zal ook gebruik gemaakt worden van meer geavanceerde audiovisuele hulpmiddelen zoals drie-dimensionale films en beeldbandapparatuur.

4. Nieuwe toetsingsmethoden bevinden zich reeds in een eerste stadium van onderzoek. Het ziet er naar uit, dat binnen niet al te lange tijd 'instant-response-systems' en door computers gescoorde tests de klas en haar vorderingen zullen 'bewaken'. Het puntenboekje zou dan wel eens vervangen kunnen worden door een magneetband.

5. Als we, zoals te verwachten is, in de toekomst meer informatie over de leerling zullen bezitten, zal het mogelijk zijn elke leerling op de voor hem meest geschikte wijze te benaderen. Individuele instructie en differentiatie binnen klasseverband zullen dan gerealiseerd moeten worden. Het lijkt toch op zijn minst twijfelachtig, dat alle leerlingen, langzaam of snel, begaafd of niet-begaafd precies evenveel dagen aan een bepaalde leerkring zouden moeten besteden en iedere dag exact evenveel minuten 'les' nodig zouden hebben.

Deze toekomstvisie, en hoe dichtbij is tegenwoordig de toekomst, zal duidelijk maken dat er in onze klaslokalen voor het wiskundeonderwijs een en ander kan worden aangepast.
In het nu volgende zal ik een aantal mogelijkheden voor bouw en inrichting van wiskundelaboratoria schetsen, in de hoop dat u, geachte lezer, mij niet zult verwijten dat ik slechts woeste toekomstfantasieën beschrijf. Ik verwacht dat u er met mij van overtuigd zult geraken, dat we moeten zoeken naar middelen om ons wiskundeonderwijs ook in de toekomst aangepast aan de eisen van de tijd te verzorgen.
Op de eerste plaats wil ik stellen dat een wiskundelab. ruimer van afmetingen moet zijn dan een normaal leslokaal. Er moet ruimte zijn voor hulpmiddelen en apparatuur, er moeten mogelijkheden zijn voor een variablele klasse-opstelling en bovendien moeten werkhoeken of nissen gemaakt kunnen worden voor leerlingen die met apparaten werken, terwijl de rest van de groep bezig is met klassikale instructie, geprogrammeerde leerboeken, modellenbouw, enz.
Het schetsplan in bijgaande figuur zal misschien duidelijk maken, hoe ik mij de verdere inrichting van een wiskundelaboratorium voorstel. Overigens zal de praktijk uit moeten maken in welke opzichten zo'n plan realiseerbaar en nuttig is. Voor zover mij bekend zijn in ons land 'wiskunde-werk-lokalen' in bedrijf in Hengelo en Eindhoven; bovendien zal de C.M.L.W. in haar nieuwe behuizing trachten een wiskundelaboratorium in te richten, waarin wiskundeleraren en



Verklaring der nummers in het schetsplan:

1. groot schrijfbord voorzien van grafiekenblad en modeltekeningen
2. nijgend scherm voor overhead-projectie.
3. scherm voor dia- en lusfilmprojectie.
4. grote werktafel voor modellen en demonstraties.
5. overhead-projector.
6. bedieningstoestel voor instant-response-system; kablering door sleuven in de vloer of kokers in de wand.
7. registrator voor 6.
8. t.v.-toestel voor schooltelevisie of gesloten-t.v.-kring.
9. ruimte voor klassikale instructie, toetsing, discussies, klassewerk.
10. rolbare scheidingswanden voor vorming van werknissen, (150 cm. hoog)
11. werkhoek voor modellenbouw, meettechniek, enz.
12. werkhoek voor geprogrammeerde instructie met behulp van teaching-machines (geluidsbanden en dia's)
13. werkhoek voor het gebruik van rekenmachines.
14. bergruimte voor hulpmiddelen en materialen.
15. reproductieapparatuur voor het vervaardigen van teksten en transparanten.
16. computer-terminal in aparte ruimte ter bescherming en wegens geluidshinder.
17. projectortafel met dia- en lusfilmprojectoren.

andere belangstellenden kunnen kennis nemen van de mogelijkheden op het gebied van hulpmiddelen voor het wiskundeonderwijs.

Ongetwijfeld zal de produktie van onderwijshulpmiddelen en apparatuur voor wiskundelaboratoria door de industrie ter hand genomen of opgevoerd worden. Het lijkt mij noodzakelijk dat 'het onderwijs' daarbij niet afwacht en toeziet, maar zorgt voor een positieve inbreng door 'erbij te zijn'.
Ik stel mij daarom voor, dat nuttig werk zou kunnen worden gedaan door een op te richten 'werkgroep wiskundelaboratorium', die zich tot taak stelt:

1. inventarisatie van bestaande hulpmiddelen,
2. kennisname van buitenlandse ontwikkelingsprojecten,
3. uitwerking van ideeën in nauwe samenwerking met producenten.
4. opzetten van experimenten,
5. rapportage in zo ruim mogelijke kring van belanghebbenden.

Dit alles uiteraard in nauwe samenwerking met schoolarchitecten en instituten, die zich bezig houden met de bestudering en de ontwikkeling van audio-visuele en andere hulpmiddelen voor het onderwijs.

Boekbespreking

Philosophical Logic, Edited by J. W. Davis, D. J. Hockney and W. K. Wilson, Synthese Library, D. Reidel Publishing Company, Dordrecht, 1969, VIII+277 blz., *f* 45,—.

Het boek bestaat uit achttien artikelen, waarvan negen een verslag inhouden van het colloquium, dat door het Department of Philosophy at the University of Western Ontario gehouden is te Londen in 1967. Hieraan zijn door de uitgevers nog een negental artikelen toegevoegd. Enkele artikelen hebben een meer formeel karakter en gaan over de logische systemen, die ontwikkeld zijn door Lewis, waarin de modaliteit een rol speelt. Het merendeel heeft echter betrekking op voor de wiskundige minder bekende delen van de logica. Een belangrijke rol speelt hierin de semantiek. Davidson tracht aan te tonen, dat de semantische problemen vaag zijn en alleen goed formuleerbaar, als ze teruggebracht worden tot de door Tarski geïntroduceerde opvatting. Hiermee is echter veeleer een probleem afgesneden dan opgelost. In andere artikelen wordt de semantiek dan ook vanuit een niet-formeel gezichtspunt bekeken. Het gaat er daarbij om criteria te vinden voor de waarheid van een uitspraak (hetgeen iets principieel anders is dan de afleidbaarheid, welke op formele gronden beoordeeld wordt). Hiermee verwant zijn de problemen aangaande geloof (vermoeden), waarmee we in de sfeer van de intentionele logica terechtkomen. Daarna komen interrogatieve logica en inductieve logica ter sprake. Zeer de moeite waard is ten slotte het laatste artikel van de bundel van Erik Stenius over Mood and Language-Game. De betekenis van de modaliteiten wordt hier op heldere en aardige wijze uiteengezet.
Kortom, het boek bevat een veelheid van lezenswaardige stof. Degene die zich voor logica interesseert alleen voorzover deze hem bij het wiskundige denken van pas komt, moet het echter niet gaan lezen.

P. G. J. Vredenduin

Heinrich Bauersfeld e.a., *Alef 1 und Alef 2, Wege zur Mathematik, Handbuch zum Lehrgang,* Teil 1 und Teil 2, 264 blz. en 64 blz. illustraties; per deel DM 16,80; Schroedel Verlag, Hannover, 1969 en 1970.

Een fascinerende uitgave!
Reeds in 1966 werd er door het *Seminar für Didaktik der Mathematik* in Frankfurt geëxperimenteerd met een moderne wiskundeleergang voor het basisonderwijs. Dit experiment staat bekend als het *Frankfurter Projekt.* De daarbij opgedane ervaringen liggen ten grondslag aan het nu gepresenteerde 'alef'-programma.
De bedoeling van de auteurs is niet geweest een aantal 'moderne' begrippen in te enten op ons traditionele onderwijs, maar wel een streven naar een van de grond af aan opbouwen van een geheel nieuwe leergang. Getracht wordt de leerling op zo vroeg mogelijke leeftijd bekend te maken met de belangrijkste wiskundige structuren, daarbij gebruik makend van moderne werkvormen en van passend concreet materiaal.
De beide delen *Alef 1* en *Alef 2* hebben betrekking op de stof die in het eerste leerjaar van het basisonderwijs aan de orde dient te komen. Voor de klassen; 2, 3 en 4 van de Grundschule zullen verdere delen volgen.
Radicaal wordt er gebroken met veel wat door de traditie gewettigd scheen. Dat betekent een terugdringen van het cijferwerk waar in het verleden het rekenonderwijs om scheen te draaien. De leerlingen worden in plaats daarvan zo vroeg mogelijk voor spelsituaties geplaatst die tot een confrontatie met wiskundige structuren leiden. De achtergrond hiervan is gelegen in de omstandigheid dat er een isomorfie valt aan te wijzen tussen de structuur van die spelsituaties en bepaalde wiskundige structuren. De wiskundige taal en meer in het algemeen allerlei verbalisering komt eerst in de tweede plaats. De werkvorm is die van de zelfwerkzaamheid, waarbij de klas opgelost is in kleine groepen. De leerlingen leren zichzelf en elkaar te controleren. Een zekere democratisering van het onderwijs wordt geaccentueerd door de aanbeveling dat elke spelgroep zijn eigen leider kiest. Het behoeft geen betoog dat het ouderwetse klasselokaal voor dit onderwijs onbruikbaar is. Elke school heeft voor de wiskunde speciaal ingerichte wiskundige werklokalen nodig.
De hoofdbegrippen uit de verzamelingenleer en de wiskundige logica en begrippen als functie, afbeelding, relatie, komen in de opvolgende spelletjes die in de handleiding worden besproken tot hun recht. Het boek bevat een aantal lesschema's voor het eerste schooljaar waarin het doel van de desbetreffende lessen wordt geformuleerd en de moeilijkheden die er bij de behandeling kunnen optreden worden besproken. Ze zijn uitermate instructief.
De handleiding is door een team van zeven didactici samengesteld. Het werk steunt op dat van bekende didactici als Dienes, Papy en Beberman en tal van anderen naar wier werk in de literatuurlijst wordt verwezen. Naast deze lijst vindt men achter in het werk een overzicht van de bij de gekozen stof behorende leerdoelen en van de werkbladen die de leerlingen successievelijk zullen hebben in te vullen.
Het motto boven een ingesloten prospectus aan Comenius ontleend luidt: 'Was einst schwierig erschien, das wird zum Gelächter der Nachwelt'. Het getuigt van een hooggestemd optimisme zo niet van overmoed. Er zijn echter in het werk van moderne psychologen zoals Bruner uitspraken aan te wijzen die de 'overmoed' van de bewerkers van Alef 1 en 2 schijnen te rechtvaardigen.
Voor de Nederlandse onderwijzer die zich in wil stellen op een komende reorganisatie van het 'reken'-onderwijs op de basisschool is de lectuur van *'Wege zur Mathematik'* buitengewoon instructief. Maar tevens voor de leraar bij het voortgezet onderwijs. Het is duidelijk dat de modernisering van geheel ons wiskundeonderwijs in een nieuwe fase zal geraken als tal van onderwerpen die nu de leraar in de onderbouw van onze scholen nog voor didactische problemen stellen, in het basisonderwijs een behandeling zullen hebben gekregen in Alefs geest. Er zal nog heel wat experimenteel werk verzet moeten worden op didactisch gebied en er zal een ingrijpende herscholing van de Nederlandse onderwijzer plaats moeten hebben gehad voor we in ons land zover zijn.
Ondertussen wordt de lectuur van de hooggestemde *Wege zur Mathematik* aan ieder aanbevolen die in de modernisering van het wiskundeonderwijs voor leerlingen van 5 – 18 jaar

belang stelt.
We zien de verschijning van de volgende delen van deze Alef-serie met grote belangstelling tegemoet.

Joh. H. Wansink

G. Krooshof c.s., *Moderne Wiskunde,* Deel 2 voor de brugklas, Wolters-Noordhoff, Groningen 1968.

Dit deel is bestemd voor V.W.O., H.A.V.O. en M.A.V.O. Met een sterretje zijn de moeilijker – of soms minder belangrijke – opgaven aangegeven, die op de Mavo-scholen kunnen worden overgeslagen. Bij alles is natuurlijk de aangeboden leerstof aangepast aan de op dit ogenblik gangbare.
Bij het hoofdstuk 'machten' wordt misschien voor dat ogenblik voldoende oefenmateriaal aangeboden; in de verdere loop van het boek wordt dit onderwerp echter slechts sporadisch herhaald, zodat op het eind van de eerste klas waarschijnlijk de vaardigheid in het rekenen met machten gering zal zijn. Ofschoon het rekenen geïntegreerd is in de algebra, zouden we toch het afzonderlijke hoofdstuk over decimale getallen niet graag gemist hebben.

Het wordt (nog) niet algemeen aanvaard, dat de behandeling van (en zelfs kennismaking met) de negatieve getallen wordt uitgesteld tot de tweede helft van het eerste leerjaar. Op pagina 49 wordt toch nog bij de definitie van tegengestelde gesuggereerd, dat $-a$ een negatief getal is. Opgave 7 kan die indruk niet wegnemen. Ook bij opdrachten zoals 6 + – 2 – – 3 mis ik de aanwijzing (feitelijk de *eerste* rekenregel): Lees van links naar rechts. Ook een aanwijzing zoals: Wat tussen haakjes staat, hoort bij elkaar en behoort – zo mogelijk – door zijn 'uitkomst' te worden vervangen, mist men; vele opdrachten kunnen daardoor verwarrend zijn. Dat ook de invoering van moderne notaties niet alle didactische problemen oplost zou kunnen blijken op bladzijde 84: Het woord 'gelijkwaardig' geeft vaak aanleiding tot grote verwarring; het onderscheid tussen = en $\Leftrightarrow$ blijft een voorwerp van aanhoudende zorg. Op de behandeling van de meetkunde wordt in de diverse typen brugklassen heel verschillend gereageerd. Het geheel is kennelijk afgestemd op havo-mavo. Gelukkig geven de aanvullende Bulletins aanwijzingen over de volgorde en een mogelijke behandelingswijze. Men kan speciaal van mening verschillen over het vrij constante gebruik van ruitjes-papier; het tekenen op blanco papier dient aangemoedigd te worden. De passer is blijkbaar taboe en de geodriehoek is het enige tekenhulpmiddel. De constructie in § 14 pagina 137 van de bissectrice geeft gemakkelijk de suggestie dat dit de enige echte methode is om de bissectrice te vinden.

Het zal nog lang een twistpunt blijven of het woord 'graden' thuis hoort bij $\angle A = 90^{\circ}$. Vrij consequent laat het boek het beroemde nulletje voor graden weg in vergelijkingen. Het is jammer dat het boek de gelegenheid om bij de berekeningen zoals in hoofdstuk 4 te komen tot een eerste vorm van deductief redeneren zo weinig gebruikt. Zeer tot ons genoegen echter wordt aan de opbouw en het lezen van figuren grote aandacht besteed. Ook de veranderingen (transformaties) komen duidelijk te voorschijn; deze stof is eenvoudig en interessant voor de leerlingen, bovendien gewenst voor de verdere studie.
Op het ogenblik dat deze recensie verschijnt zijn de schrijvers bezig de beide eerste delen te herzien. Ze maken daarbij gebruik van de ervaringen van zeer vele docenten, die met het boek gewerkt hebben.

W.P. Thijssen

G. Krooshof c.s., *Moderne Wiskunde,* Deel 3 hm (voor havo-mavo), Wolters Noordhoff, Groningen, 1969.

Dit deel is bestemd voor de eerste helft van het tweede leerjaar van havo- en mavoscholen; de opzet is een voortzetting van deel 2 voor de brugklas. In het eerste hoofdstuk komt pas het begin van wat men zou kunnen noemen de veeltermenalgebra. Als eerste kennismaking lijkt het wel geslaagd. Het zal echter moeilijk blijven bekleven door de te geringe voorbereiding in deel 2 en omdat het aantal routine-aankwekende opgaven te klein is.
Vol enthousiasme werken de leerlingen aan het hoofdstuk wortelvormen, dat grotendeels van zijn oude magie is ontdaan. Of men met de rekenliniaal moet werken, zal wel steeds een open vraag blijven. Men heeft op genoemde scholen leerlingen bestemd voor zoveel richtingen, waarbij men van het type der ouderwetse M.M.S. moeilijk belangstelling kan verwachten om zo'n instrument uit technisch milieu aan te schaffen. De iteratieve methode eist veel tijd en zal natuurlijk niet voor allen geschikt zijn; de betreffende paragraaf is van een sterretje voorzien.

Er wordt in het boek geen verdeling gemaakt in meetkunde en algebra. Mogelijk komt daarom de meetkunde er zo bekrompen af. Hoe zeer we van het oude zijn afgedwaald, blijkt wel bij bladzijde 67 waar de leerlingen bij het construeren van een rechthoekige driehoek soms een passer moeten gebruiken; dit kost onverwachts veel moeite.
Het getal nul zit niet alleen de leerlingen dwars; nog steeds is het mij niet duidelijk of even getallen en veelvouden van twee (waaronder de nul al of niet inbegrepen) voor de schrijvers identieke begrippen zijn. Sommigen duiden positieve gehele getallen aan met Z^+ inplaats van N^+, men zou dan de definities van veelvouden mogelijk kunnen aanpassen. In hoofdstuk 6 zou moeten blijken dat de ingeklede vergelijkingen goed zijn voorbereid; een groei naar de vaardigheid in het lezen en oplossen van deze problemen blijkt niet simpel. Een aanvulling in de richting van geprogrammeerde instructie zou nog wenselijk zijn.

Zonder meer baanbrekend is het werken van de schrijvers met relaties; de eenvoud van de voorbeelden en de plaats van dit onderwerp in het geheel zal voor vele gebruikers een openbaring geweest zijn. Nu blijken afbeeldingen en daarna transformaties eenvoudige begrippen. Bij de leerlingen blijkt ook nu weer de gehechtheid aan zeer bepaalde wijzen van werken; zeer eenvoudige opgaven met andere context – b.v. overgenomen uit een ander boek – geven de indruk dat het toch nog een 'nieuw' begrip gebleven is.
Zeer duidelijk demonstreert zich op blz. 160 onderaan de gebrekkigheid van de gebruikte notaties: Twee hoofdletters achter elkaar geschreven, b.v. AB kan de rechte door die twee punten voorstellen, een lijnstuk en ook de lengte van dat lijnstuk, dus een getal.
Met $AB = CD$ wordt steeds bedoeld, dat die lijnstukken gelijke lengte hebben, niet dat er twee rechten samenvallen.
In $XY = \{ P \mid .... \}$ wordt met XY zeker bedoeld een of andere lijn. Men zou dit beter $l(X, Y)$ of l_{XY} kunnen noemen.
De inleiding in de statistiek doet prettig aan; mogelijk is toch het onderscheid tussen staafdiagram en lijndiagram in figuur 99 en figuur 100 verwaterd. In de samenvatting van nieuwe woorden ontbreekt 'waarnemingsgetal'.
Deel 3 is duidelijk gedrukt, redelijk geillustreerd en voor de leerlingen prettig leesbaar.

W.P. Thijssen

C. J. Alders †, K. H. Cohen e.a., *Wiskunde over V.W.O.* 3 V, Wolters-Noordhoff N.V., Groningen 1970, 154 blz. f 10,05, Antwoorden f 2,–.

Dit derde deel is bestemd voor gebruik in de derde klassen van het V.W.O.
Behandeld worden: vectoren (15 blz.) relaties, functies en afbeeldingen, vermenigvuldiging van figuren, de lineaire en kwadratische functie, gelijkvormige figuren, ongelijkheden en goniometrie. Het boek besluit met 299 herhalingsvraagstukken. Of het bespreken van injecties, surjecties en bijecties bijdraagt aan het verdiepen van inzicht in de soorten van afbeeldingen is een open vraag. Een beperking tot een afbeelding *in* of *op* een verzameling lijkt me meer voor de hand te liggen. Men kan dan nog nagaan of de inverse f^{-1} weer een afbeelding is.
De uitvoering is uitstekend.

Burgers

G. Krooshof c.s., *Moderne wiskunde,* deel 4 h.m., Wolters-Noordhoff, Groningen, 1969.

Deel 4 h.m. voor de tweede helft van de tweede klas havo-mavo begint met een broodnodige herhaling van de begrippen uit de verzamelingenleer. Vergelijkingen met twee onbekenden leren we vooral kennen als een voorschrift tot het vormen van toelaatbare getallenparen, wat dan aanleiding geeft zowel tot een grafiek op een x-y-assenkruis als tot een pijlenfiguur. De aansluitende behandeling van ongelijkheden is blijkbaar tevens een inleiding tot lineair programmeren. Merkwaardig is dat de gebruikelijke oplossing van twee vergelijkingen met twee onbekenden, n.l. door substitutie, aan het einde van het hoofdstuk komt, terwijl die paragraaf nog wel van een sterretje is voorzien, terwijl de methode van de lineaire combinaties alles overheerst. Strijdige stelsels komen summier aan de orde, maar afhankelijkheid van voorwaarden komt onvoldoende tot zijn recht.

Bij de meetkunde speelt draaiing een grote rol, jammer dat het tot eenvoudige oefeningen beperkt blijft. Bij de stelling van Thales: 'elke omtrekshoek in een halve cirkel is recht' krijgen we een bewijsopdracht.
Het ontbinden in factoren met toepassingen op vergelijkingen is wel helder, maar het stelt te weinig eisen aan de zelfstandigheid van de leerling.
Het hoofdstuk over kwadratische functies met toepassingen is duidelijk; in dit stadium is het een aangename afwisseling waarbij de leerling niet alleen met de eenvoudigste zaken kennis maakt, maar hij ook een duidelijke oefening krijgt. De rekenliniaal kan men omzeilen of opsparen tot de vierde klas voor degenen die examen wiskunde willen doen; voor dezen zou het tot de verplichte examenstof behoren.
Lengte, oppervlakte en inhoudsberekeningen worden met zeer veel aanwijzingen gepresenteerd. Bij de behandeling van 'evenredigheid als afbeelding' blijkt duidelijk hoe oppervlakkig, misschien zelfs misleidend, dit onderwerp op de lagere school behandeld wordt. Statistiek sluit de zaak af, maar men zou dit ook al vroeger kunnen behandelen.

Over het algemeen zijn we over de behandeling der stof in dit vierde deel veel minder enthousiast dan bij de voorafgaande delen. De aanpak uit het eerste deel blijft overheersen en bij het zelf zoeken staan zoveel aanwijzingen, dat het geen zoeken meer is maar aflezen. De eenvoud van het geheel benadeelt vooral de middelmatige leerling, die zelden een aanleiding ziet zich eens extra in te spannen en bij een afwijkende opdracht – uit andere bron– zich niet thuis voelt. Het tekort aan de eisen voor routine bij eenvoudige handelingen en het ontbreken van vrijwel iedere aanleiding om zich eens te bezinnen op de gronden van de afleiding (noem het een aanzetten tot bewijs) geven een geringe voorbereiding voor de derde klas en vooral voor de eventuele hogere klassen van het havo.

W.P. Thijssen

Dr. D. van Dalen, *Formele logica,* een informele inleiding, Academische paperbacks, A. Oosthoek's Uitgeversmaatschappij n.v., 1971, 92 blz., ing. f 12.50.
Dit boekje schetst 'voor de lezer zonder gespecialiseerde wiskunde-opleiding' enkele technieken en methodieken van de logica. Het beschrijft de propositielogica, de predicatenlogica en bijbehorende interpretaties. Bewijzen van gecompliceerde stellingen zijn weggelaten. Naar mijn mening heeft de schrijver een grote dienst bewezen aan beoefenaren van wetenschappen, die, meer dan vroeger, wiskundige exactheid vereisen. Ook als inleiding ten gerieve van wiskundigen is het bijzonder geschikt.

H. W. Lenstra sr.

STAATSEXAMEN HBS 1970

Uit het examenverslag

WISKUNDE-HBS-A

Schriftelijk

De resultaten van het schriftelijk examen liepen zeer sterk uiteen. Naast zeer goede cijfers, waren er veel extreem lage cijfers. In het verslag over het examen in 1969 constateerde de sub-commissie reeds, dat het aantal kandidaten dat zich slechts voor één onderdeel prepareert leek toe te nemen. Deze trend was nog in sterkere mate merkbaar bij de examens van dit jaar.

Mondeling

Een zeer groot aantal kandidaten toont weinig of geen begrip bij het uitvoeren van automatiseren. Definities en stellingen worden klakkeloos toegepast zonder dat men zich realiseert of een en ander is toegestaan of niet en/of de gekozen stelling al of niet bruikbaar is bij het gestelde probleem.
Logaritmen, functies, rijen, evenredigheden, enz. zijn voor veel kandidaten 'trucjes' om een of andere 'uitkomst' te krijgen.

Het formuleren en het gebruik van termen is zeer onvoldoende.
Enige voorbeelden:

een 'functie' wordt 'vergelijking' genoemd, i.p.v. 'midden' spreekt men over 'helft', driehoeken zijn 'gelijk' als men 'congruent' of 'gelijkvormig' bedoelt.
Een 'produkt' noemt men vaak 'evenredigheid', aan een 'parabool' kent men soms een 'richtingscoëfficient' toe, en men heeft dikwijls niet van een 'symmetrie-as' gehoord bij de parabool.

De sub-commissie constateerde in haar verslag over het examen in 1969 dat de goniometrie beter gekend was dan in de voorgaande jaren. Het lijkt er echter op een eenmalige uitschieter te zijn geweest.
Definities van goniometrische verhoudingen, eenvoudige eigenschappen ervan, sinus- en cosinusregel werden veelal beschouwd als een vervelende hobby van de examinatoren.

Zeer sterk komt de gedachte naar voren dat het aantal kandidaten dat meent volkomen onvoorbereid examen wiskunde te kunnen doen steeds groter wordt.

Het lijkt de sub-commissie niet overbodig op te merken, dat de gemaakte opmerkingen door de kandidaten ter harte moeten worden genomen als zij zich voorbereiden op het examen.

WISKUNDE-HBS-B

Algebra

Schriftelijk

De resultaten van het schriftelijk examen waren dit jaar niet erg bevredigend. Weinig kwamen kandidaten met het cijfer 7 of hoger voor de dag. De slechte resultaten zijn grotendeels te wijten aan slordigheid, onnauwkeurigheid en een onvoldoende voorbereiding. De laatste opgave werd te vaak per toeval fout of goed gemaakt.

Mondeling

De subcommissie vraagt zich bij voortduring af of de examenverslagen wel worden gelezen. Bij de kandidaten worden jaar in jaar uit dezelfde tekortkomingen geconstateerd, als die waarop in de voorgaande verslagen altijd is gewezen.
Ondanks dat wordt het toch weer geprobeerd; puntsgewijs volgen enige belangrijke aanwijzingen:

1. Vele kandidaten hebben de grootste moeite met de juiste formulering van de wiskundige begrippen in de Nederlandse taal.

2. Existentievoorwaarden worden bij herhaling onnauwkeurig vermeld,
   bijv. $\sqrt{a}$ bestaat voor $a > 0$ i.p.v. $a \geq 0$
   log a bestaat voor $a \geq 0$ i.p.v. voor $a > 0$

3. Vele definities kunnen vaak slecht of in het geheel niet onder woorden worden gebracht, zoals bijv. de definitie van het begrip absolute waarde, van 'sommeerbaar', van de 'som' van een oneindig voortlopende rij, van differentiaalquotiënt e.d.

4. Nog altijd willen veel kandidaten bij het bepalen van de uiterste waarden van een functie gebruik maken van de tweede afgeleide, ook als het tekenonderzoek van de eerste afgeleide voor de hand ligt; zeer vaak wordt bij het bepalen van de uiterste waarden alleen de voorwaarde gesteld, dat de afgeleide functie gelijk aan 0 moet zijn, waarbij dan een nader onderzoek achterwege blijft.

5. Er zijn vele kandidaten, die bij het bepalen van de uiterste waarden van kwadratische functies deze niet kunnen vinden door de methode van de kwadraatafsplitsing.

6. Eenvoudige grafieken kunnen dikwijls niet systematisch worden opgebouwd.

7. Vaak bleek eén kandidaat niet in staat te bewijzen dat een (verticale) lijn een as van symmetrie van een getekende grafiek was.

8. Grafieken voor t_n en S_n van een rij konden in eenvoudige gevallen als $t_n = 2n - 5$ en $S_n = n^2 - 4n$ niet altijd korrekt, dan wel in het geheel niet worden getekend.

Stereometrie

Schriftelijk

De resultaten van het schriftelijk examen waren bijzonder teleurstellend. Slechts een gering percentage van de kandidaten kwam in aanmerking voor een vrijstelling, terwijl het aantal onvoldoende en zeer onvoldoende cijfers dit jaar bijzonder groot was. Vooral bij de vraagstukken waarin sprake was van 'bol', 'kegel' en 'cilinder' toonden de kandidaten ernstige tekortkomingen; de commissie ontkomt niet aan de indruk, dat men deze onderwerpen, in het algemeen de laatste van vrijwel ieder leerboek, te vluchtig of niet had bestudeerd.

Mondeling

Betreffende het mondeling onderzoek moge de commissie verwijzen naar de opmerkingen, gemaakt over het examen stereometrie 1969, waarbij zij ook nu, nog eens met nadruk, de aandacht wil vestigen op het feit, dat maar weinig kandidaten in staat waren, zonder hulp, een

behoorlijke projectie-figuur van een lichaam te ontwerpen, waarbij men dan dikwijls wijkende lijnstukken te lang tekende en niet zichtbare lijnen vergat te stippelen.
Vaak werden de eenvoudigste stellingen betreffende het viervlak niet gekend.
Ook nu weer werd een ontstellend tekort aan kennis van de belangrijkste onderdelen van de planimetrie geconstateerd, terwijl weinig kandidaten in staat waren een stelling in behoorlijk Nederlands te formuleren.

Ook nu wist men bijv. weer niet wat het verschil is tussen de projectie van een lijn(stuk) en een projecterende lijn, het verschil tussen de afstand van twee kruisende lijnen en de loodrechte snijlijn (binormaal) en dat men deze afstand vrij eenvoudig kan construeren met behulp van een vlak loodrecht op één dezer lijnen, was voor veel kandidaten een openbaring.

Goniometrie en Analytische Meetkunde

Schriftelijk Goniometrie

Het laatste gedeelte van de goniometrie-opgave van het schriftelijk werk kan veel eenvoudiger worden opgelost zònder dan mèt de traditionele oplossingsmethoden. Zeer weinig kandidaten hebben dit echter beproefd. Hieruit blijkt weer eens, dat bij de voorbereiding (ook voor het schriftelijk gedeelte) van het examen niet alleen maar moet worden getraind in formules en methoden, maar vooral ook aandacht moet worden geschonken aan het onbevangen aankijken en spontaan oplossen van eenvoudige problemen.

Mondeling Goniometrie

Het heeft de subcommissie enige voldoening gegeven te hebben kunnen constateren dat het tekenen 'op schaal' van grafieken van goniometrische functies minder aanleiding gaf tot klachten dan voorheen. Dat de ware reden tot de noodzaak voor het op-schaal-tekenen doorzien werd, bleek niet bij alle kandidaten.

Nog steeds hadden vele kandidaten de overtuiging, dat het nul-zijn van de afgeleide functie nodig en voldoende is voor het optreden van een extreme waarde. Bij verder doorvragen bleken zij meestal wel iets te hebben gehoord over tekenwisseling van de afgeleide functie, maar dat dit juist het karakteristieke is voor een extreem, werd veelal niet ingezien. Vele kandidaten bleken niet te denken aan randextremen en aan de mogelijkheid van een extreme waarde voor een waarde van de veranderlijke, waar de afgeleide functie niet is gedefiniëerd.

Schriftelijk Analytische Meetkunde

Ofschoon de opgaven voor het schriftelijk werk zeker niet bijzonder moeilijk waren, is het de subcommissie opgevallen, dat er zeer veel bijzonder lage cijfers moesten worden toegekend. Blijkbaar moeten vele kandidaten zich meer oefenen in het maken van vraagstukken dan veelal het geval is.

Mondeling Analytische Meetkunde

Naar het oordeel van de subcommissie moet er door vele kandidaten meer zorg worden besteed aan het gebruik van de taal. Vage uitdrukkingen als 'uitwerken', 'voldoen' enz. waren schering en inslag en ze belemmerden vaak het inzicht in wat er eigenlijk moest gebeuren.
Het verwarren van woorden als 'term' en 'factor' of 'vergelijking' en 'functie' bleek een nog steeds voorkomend euvel.

Wat onder het oplossen van een vergelijking moet worden verstaan, of onder het elimineren van een parameter stond vele kandidaten niet helder voor de geest. Sommige kandidaten gaven zonodig wel aan, dat het delen door een parameter niet is geoorloofd als deze nul is, maar wisten vaak er geen raad mee in het geval deze wèl nul is. De eenvoudige raad: 'dit geval apart bekijken' zou hier goede diensten verlenen.

Het bleek de subcommissie dat het opstellen van de vergelijkingen voor de asymptoten van een hyperbool, óók wanneer deze door een zeer eenvoudige vergelijking was gegeven, de kandidaten dikwijls veel moeite en tijd kostte. Dat deze vergelijkingen kunnen worden gevonden door het tweede lid van $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ te vervangen door nul was voor velen een openbaring.
Bij vraagstukken waarin wordt gevraagd naar de vergelijking van een verzameling van punten bleek het voor vele kandidaten buitengewoon moeilijk om het verschil te zien tussen de betrekking van bijv. de cöordinaten x_m en y_m van een punt M en de vergelijking waaraan deze x_m en y_m moeten voldoen.

Didactische literatuur

uit buitenlandse tijdschriften

Mathematica & Paedagogia (45-49; 1970-1971).

M. Kassab, L'isomorphisme et la construction des groupes; approche géometrique;
J. De Kerf, Opleiding programmeur.
J. Isaac, La confection d'un horaire au moyen des ensembles;
E. Bouqué, Over equipollentie;
R. Broeckx, Eental, tweetal, drietal;
R. Broeckx, Professoren over functies;
R. Broeckx, Programme de mathématique pour les classes de 4e des humanités.

A. Roumanet, Écriture des entiers naturels;
M. Vanderwiele, Analytische meetkunde in de het vlak van Gauss;
M. Avelange, Les réels;
D. Joye, Over bewerkingen;
P. Deligne, Une congruence entre coefficients multinômінaux;
W. De Roover, Enkele veralgemeningen van de nephroïde.

G. Noël, Étude des manuels de mathématique pour la première année de l'enseignement secondaire;
W.J. Brandenburg, Het onderwijs heeft middelkarakter;
M. Vandewiele, Möbiustransformaties;
M. Schollaert, Quelques remarques au sujet d'une leçon en quatrième;
E. Steller, Einführung der Struktur (Z;+;·);
C. Sleutel, Anti-anti.

J. De Kerf, Opleiding systeemanalist;
J. Wilmet, Problèmes de calcul numérique;
L. Colot, A propos de l'introduction et de l'enlèvement des parenthèses;
F. Papy, Initiation à la notion de groupe;
M. Bastier, Du concret aux réels;
J. Moonen, Logica en bewijs in de wiskunde;
R. Bens, Wiskunde op de Vlaamse televisie.
Redactioneel: Plaats van de wiskunde in het secundair onderwijs; Leerplannen wiskunde voor de derde klassen rijksmiddelbaar onderwijs.

Niko, Belgisch driemaandelijks tijdschrift van het B.C.M.W., nr. 7 en 8; 1971.

Het tijdschrift Niko van het Belgisch Centrum voor de Metodiek van de Wiskunde heeft vanaf het zevende nummer een Nederlandstalige uitgave onder redactie van R. Holvoet; we geven hier de inhoudsopgave van de twee verschenen nummers.

Frédérique, Vergelijkingen van de eerste graad en papygrammen;
Papy, Nieuws op het gebied van het onderwijs van de lineaire vergelijkingen met één onbekende;
O. Cöllard, Een eerste wiskundig sprookje;
R. Dieschbourg, Schoolrendement en televisie;
Marcelle Papy, In het eerste leerjaar op de Toronto French School;
Fr. Plastria, Frédérique voor een Amerikaanse klas;
R. Holvoet, Diëdergroepen;
H. Breny, Onafhankelijkheid;
P. Ghesquière, Onafhankelijkheid van drie gebeurtenissen;
J. Drabbe, De Boolese algebra verbonden met de propositierekening.

Redactioneel: In memoriam Max Beberman;
Frédérique, Slierten;
L. Buyst, Codetheorie;
Papy, De dimensiestelling voor vectorruimten;
P. Hilton, Topologie in het middelbaar onderwijs;
Fr. Plastria, Pedagogische dag te Berkendal;
D. Incolle, Internationaal Congres te Knokke;
R. Holvoet, Het aanbevolen boek: Fundamental structures of algebra.

Recreatie

Nieuwe opgaven met oplossingen en correspondentie over deze rubriek aan Dr. P. G. J. Vredenduin, Van Wassenaerheuvel 73, Oosterbeek.

266 Om 0 uur precies vallen uur-, minuut- en secondewijzer samen. Gebeurt dit nog wel eens op een ander tijdstip?
En als de halve dag nu eens niet uit 12, maar uit een ander geheel aantal uren zou bestaan, zou het dan op een ander tijdstip het geval kunnen zijn?

267 Maak een magisch vierkant van 9 niet noodzakelijk verschillende natuurlijke getallen zo, dat de produkten van elke rij, van elke kolom en van elke diagonaal 10^{12} is. Hoeveel verschillende oplossingen zijn er mogelijk? Twee oplossingen heten verschillend, als ze niet door spiegeling of rotatie uit elkaar kunnen ontstaan.

Oplossingen

264 Vijftien directeuren zitten in twintig commissies. In elke commissie zitten precies drie directeuren. Iedere directeur is lid van precies vier commissies. Elk tweetal directeuren is van hoogstens één commissie samen lid. Hoe kan dat?
Beschouw de getalverzameling $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Een directeur stellen we voor door een paar elementen van V, een commissie door een drietal elementen van V. Er zijn dan $\binom{6}{2} = 15$ directeuren en $\binom{6}{3} = 20$ commissies. Directeur (a, b) is lid van commissie (p, q, r) dan en alleen dan als $\{a, b\} \subset \{p, q, r\}$. De leden van commissie (1, 2, 3) zijn de directeuren (1, 2), (1, 3) en (2, 3). In iedere commissie zitten dus precies drie directeuren. De directeur (1, 2) is lid van de commissies (1, 2, 3), (1, 2, 4), (1, 2, 5), (1, 2, 6). Iedere directeur is dus lid van precies vier commissies. Bovendien zijn twee directeuren van hoogstens één commissie samen lid. Zodat aan alle eisen voldaan is.

265 Een kwadraat met oneindig veel rijen en kolommen moet zo gevuld worden met getallen 1, 2, . . . , 25, dat elk deelkwadraat van 25 getallen magisch is.
De opgave is gelijkwaardig met: maak een magisch kwadraat van 5 bij 5, dat aan de speciale eigenschap voldoet, dat ook de getallen op de plaatsen van de kruisjes, van de rondjes en van de horizontale en van de verticale streepjes gelijk aan 65 is, zowel in de linker als in de rechter onderstaande figuur.

	I	–	O	X
X		I	–	O
O	X		I	–
–	O	X		I
I	–	O	X	

X	O	–	I	
O	–	I		X
–	I		X	O
I		X	O	–
	X	O	–	I

De getallen 1, 2, . . . , 25 kunnen we schrijven

$a + 5b$, waarin $a = 1, 2, 3, 4, 5$ en $b = 0, 1, 2, 3, 4$.

We vullen nu twee kwadraten van 5 bij 5 met de getallen 1, 2, ..., 5 resp. 0, 1, ..., 4 op onderstaande manier.

1	3	5	2	4
2	4	1	3	5
3	5	2	4	1
4	1	3	5	2
5	2	4	1	3

0	3	1	4	2
1	4	2	0	3
2	0	3	1	4
3	1	4	2	0
4	2	0	3	1

In het linker vierkant is links boven begonnen met 1. Naar beneden gaande is telkens 1 bij het getal opgeteld en naar rechts gaande 2 (cyclisch). In het rechter vierkant zijn deze getallen resp. 0, 1, 3.
Nu heeft het linker zowel als het rechter vierkant de eigenschap, dat alle sommen op horizontale rijen, verticale rijen, diagonalen, en ook op de plaatsen van de kruisjes, van de rondjes, van de horizontale en van de verticale streepjes aan elkaar gelijk zijn, namelijk $1+2+3+4+5$ in het linker, en $0+1+2+3+4$ in het rechter vierkant. Komt op twee plaatsen in het linker vierkant hetzelfde getal voor, dan zal dat in het rechter juist niet het geval zijn. Zo vindt men op de vijf plaatsen, waar links het getal 1 staat, rechts de getallen 0, 2, 4, 1, 3.
Uit de beide vierkanten vormen we nu een nieuw vierkant door als links in een vak het getal a staat en rechts in het overeenkomstige vak het getal b, in het nieuwe vierkant het getal $a + 5b$ te zetten. Daardoor ontstaat het onderstaande vierkant. Dit voldoet aan alle gestelde eisen.

1	18	10	22	14
7	24	11	3	20
13	5	17	9	21
19	6	23	15	2
25	12	4	16	8

De methode is voor generalisatie vatbaar.

Inhoud